



УДК 624.046.5

**А. А. СОЛОВЬЕВА<sup>1</sup>**, аспирант, ст. преподаватель кафедры промышленного и гражданского строительства; **В. А. СМIRHOV<sup>2,3</sup>**, канд. техн. наук, доц. кафедры строительной и теоретической механики, вед. науч. сотрудник; **С. А. СОЛОВЬЕВ<sup>1</sup>**, канд. техн. наук, доц. кафедры промышленного и гражданского строительства

### ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ СТАЛЬНЫХ БАЛОК НАСТИЛА НА ОСНОВЕ Р-БЛОКОВ

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»  
Россия, 160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15. Тел.: (8172) 72-46-45;  
факс: (8172) 72-46-45; эл. почта: solovevaaa@vogu35.ru

<sup>2</sup>Национальный исследовательский московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)  
Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26. Тел.: (495) 781-99-88;  
эл. почта: belohvost@list.ru

<sup>3</sup>ФГБУ «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук» (НИИСФ РААСН)  
Россия, 137238, Москва, Локомотивный пр., д. 21.

*Ключевые слова:* надежность, вероятность отказа, безопасность, р-блок, оптимизация, балки настила, прогоны, вероятностное проектирование.

---

*Предложена новая методика вероятностного анализа надежности стальных балок настила при неполной (ограниченной) статистической информации. В качестве моделей случайных величин используется р-блок, который позволяет эффективно учесть алеаторную и эпистемологическую неопределенность данных. Разработанная методика позволяет выполнять технико-экономическое сравнение конструкций стальных балок настила исходя из объективного показателя безопасности – вероятности отказа. Приведена информация о возможности нормирования надежности строительных конструкций по 2 группе предельных состояний.*

---

Надежность строительного объекта – способность выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации. В соответствии с *Eurocode 0 “Basis of structural design”*, надежность выражается в вероятностных показателях. Наиболее распространенной количественной оценкой надежности в инженерно-строительной сфере является вероятность безотказной работы (или вероятность отказа).

Количественное выражение уровня безопасности эксплуатации балок настила в виде вероятности отказа позволяет выполнять сравнение различных типов поперечного сечения по критерию надежности. На текущий момент, с проектной точки зрения, оптимальным считается такое техническое решение балок настила, которое помимо соответствия техническому заданию и выполнению требований нормативной документации по критериям предельных состояний, имеет меньший вес конструкции и более выгодную экономическую составляющую (стоимость изготовления, монтажа и т. д.). Однако существуют расчетные ситуации, когда на основе вышеприведенных факторов, выбор



конструктивного решения производится проектировщиком субъективно, без возможности выбрать более надежный вариант при прочих равных условиях.

Такие ситуации описаны в фундаментальной монографии по теории надежности строительных конструкций В. Д. Райзера [1]: «У проектировщика практически отсутствует информация, насколько успешно им решена задача нормального функционирования сооружения... Вполне возможны случаи, когда конструкции сооружений более ответственного класса оказываются менее надежны, чем конструкции сооружений наименее ответственного класса». Аналогичная информация приводится и в актуальном исследовании [2], где отмечается, что «метод предельных состояний позволяет обеспечить необходимый уровень надежности зданий и сооружений, что подтверждается опытом проектирования, строительства и эксплуатации. Однако данный метод имеет ряд недостатков, например, невозможно сказать, какой уровень надежности в количественном измерении формируется в результате применения норм проектирования, одинаков ли этот уровень надежности для зданий и сооружений различных конструктивных схем и выполненных из различных материалов».

В актуальных зарубежных исследованиях также отмечается, что «несмотря на то, что можно получить очень подробные численные прогнозы (на основе конечно-элементных моделей), эти результаты часто не достигают удовлетворительного уровня согласия с «реальностью», т. е. с действительным физическим поведением рассматриваемого континуума в эффективной эксплуатационной среде. Это несоответствие вызвано эпистемологической (сокращаемая неопределенность, вызванная недостатком знаний или данных) и алеаторной (несокращаемая неопределенность, возникающая из-за стохастической природы окружающей среды) неопределенностями модели» [3].

В данной работе предлагается рассмотреть возможность использования вероятностных методов при проектировании стальной балки настила как структурного элемента покрытия. Для моделирования алеаторной и эпистемологической неопределенности предлагается использовать р-блоки как модели случайных величин [4].

Надежность элемента строительной конструкции выражается в виде вероятности реализации события исчерпания резерва несущей способности элемента по заданной математической модели предельного состояния (для различных критериев работоспособности) в виде:

$$\tilde{g} = R(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k) - S(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \geq 0, \quad (1)$$

где  $S$  – функция, характеризующая обобщенную нагрузку ( $S$  – *stress*);  $R$  – функция, характеризующая обобщенную несущую способность ( $R$  – *resistance*);  $\tilde{x}_i$  – случайная величина (переменная функции  $S$ ),  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – число случайных величин в функции  $S$ ;  $\tilde{y}_j$  – случайная величина (переменная функции  $R$ ),  $j = 1, 2, \dots, k$ , где  $k$  – число случайных величин в функции  $R$ .

Пусть известна функция  $f_g(g)$  плотности распределения вероятностей для резерва несущей способности  $g$ . Исходя из свойства функции плотности



вероятности вида  $\Pr(\xi \in [a; b]) = \int_a^b f_X(x) dx$ , можно записать выражение для оценки вероятности отказа  $P_f$  элемента конструкции:

$$P_f = \Pr(g \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_g(g) dg. \quad (2)$$

Математическая модель предельного состояния балки настила по критерию прогиба имеет вид:

$$\tilde{q}_{snow} \leq \frac{384 \cdot f_u \cdot \tilde{E} \cdot \tilde{I}_x}{5 \cdot l^4} - \sum_{i=1}^n \tilde{q}_{sw,i}, \quad (4)$$

где  $\sum_{i=1}^n \tilde{q}_{sw,i}$  – погонная нагрузка от веса  $i$ -й вышележащей конструкции, в т. ч. собственного веса элемента, случайная величина (определяемая по данным о максимальных отклонениях геометрических параметров и плотности материалов);  $f_u$  – предельный прогиб (выгиб) или перемещение, определяемый согласно табл. Д1 СП 20.13330.2016 или технологическим требованиям;  $\tilde{E}$  – модуль упругости стали, случайная величина (определяемый по данным завода изготовителя);  $\tilde{I}_x$  – момент инерции сечения, принимаемый равномерно распределенной случайной величиной в пределах геометрических допусков по стандарту производителя;  $l$  – пролет балки настила;  $\tilde{q}_{snow}$  – погонная нагрузка от снеговой нагрузки.

Функция предельного состояния может быть приведена к виду:

$$\frac{384 \cdot f_u \cdot \tilde{E} \cdot \tilde{I}_x}{5 \cdot l^4} - \left( \tilde{q}_{snow} + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_{sw,i} \right) \leq 0. \quad (5)$$

В соответствии с п. 2.3 стандарта *Joint Committee on Structural Safety Probabilistic Model Code*, плотность и удельный вес материалов строительных конструкций, а также размеры элементов строительных конструкций, как правило, описываются нормальным (гауссовским) распределением.

Погонную нагрузку на балку настила от собственного веса элемента  $\tilde{q}_{sw1}$  как случайную величину можно найти как произведение веса погонного метра на длину элемента. Вес погонного метра балки настила определяется генерацией веса погонного метра в границах изменчивости площади поперечного сечения (определенными соответствующими ГОСТ) и плотности стали по статистическим данным завода-производителя.

Погонная нагрузка на балку настила  $\tilde{q}_{sw2}$  является многокомпонентной случайной величиной  $\tilde{q}_{sw2}(\tilde{q}_{sw2-1}, \tilde{q}_{sw2-2}, \dots, \tilde{q}_{sw2-k})$ . Как было отмечено выше, нагрузку от собственного веса вышележащих конструкций допускается принимать распределенной нормально. В связи с этим суммарный эффект воздействия от веса вышележащих конструкций может быть представлен статистическими параметрами (см. табл. 1): математическое ожидание

$$m_{q_{sw2}} = \sum_{i=1}^{k-1} m_{q_{sw2-i}}, \text{ среднеекватрическое отклонение } S_{q_{sw2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} S_{q_{sw2-i}}^2}.$$



Смоделируем ситуацию выбора поперечного сечения балки настила в конструкции стального покрытия фермы. Пусть балки настила имеют шаг 3 метра и пролет 6 метров. В качестве критерия предельного состояния принят критерий прогиба. Согласно табл. Д1 СП 20.13330.2016:  $f_u = \frac{l}{200} = \frac{6}{200} = 0,03$  м.

Параметры случайных величин приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Сбор нагрузок в вероятностной постановке**

№	Наименование нагрузки	Ед. изм.	Нормативное значение	Распределение граничных функций	Интервал математического ожидания	Интервал среднев. отклонения
Постоянная нагрузка						
1	Профнастил Н75-750-0,8	Н/м	223,33	Нормальное	[217,95; 228,45]	[1,70; 1,80]
2	Утеплитель минераловатный, жесткие плиты (250/30)	Н/м	226,66	Нормальное	[193,20; 259,20]	[9,40; 12,60]
3	Утеплитель минераловатный, полужесткие плиты (120/80)	Н/м	288,33	Нормальное	[254,10; 323,70]	[10,20; 12,90]
4	Пароизоляция	Н/м	30,00	Нормальное	30,00	0
5	Профнастил Н75-750-0,8	Н/м	223,33	Нормальное	[217,95; 228,45]	[1,70; 1,80]
Кратковременная нагрузка						
6	Снеговая нагрузка для IV района	кН/м	6,0	Гумбеля	[3,31; 3,75]	[1,35; 1,54]
Параметры стали С255						
7	Модуль упругости	МПа	$2,06 \cdot 10^5$	Нормальное	$[1,99; 2,14] \cdot 10^5$	$[0,13; 0,23] \cdot 10^5$
8	Предел текучести	МПа	245	Нормальное	[278,12; 287,48]	[12,81; 18,75]

Функция распределения для площади поперечных сечений балок настила принята равномерной, т. к. существуют известные нормативные границы допустимых отклонений, распределение вероятностей внутри которых сложно оценить вследствие различных технологий производства и контроля качества профилей [5]. Изменчивость геометрических параметров некоторых видов сечений представлена в табл. 2.

Таблица 2

**Сводная таблица границ изменчивости геометрических параметров  
некоторых типов поперечных сечений**

Сечение	Вес по ГОСТ, кг/1 п.м	Границы изменчивости веса, кг	Момент инерции по ГОСТ, см <sup>4</sup>	Границы изменчивости момента инерции, см <sup>4</sup>
Двутавр 23Б1	25,80	[21,81 ; 29,88]	2996,00	[2341,12 ; 3413,35]
Швеллер 24П	24,00	[21,76 ; 26,36]	2910,00	[2571,74 ; 3206,37]
Швеллер 250×125×6	22,30	[20,79 ; 23,72]	2770,46	[2579,49 ; 3066,81]

Вероятность безотказной работы будем вычислять двумя методами: интервальным методом Монте-Карло (ИМС) [6, 7] и аналитическим [7]. Аналитический подход является более точным, но его трудоемкость растет с числом различных случайных величин и существенно возрастает при сильно нелинейных математических моделях предельных состояний и различных комбинациях функций распределения вероятностей случайных величин.

Представим графически зависимость нижней границы вероятности отказа балок настила различных поперечных сечений от их массы на рис. 1.

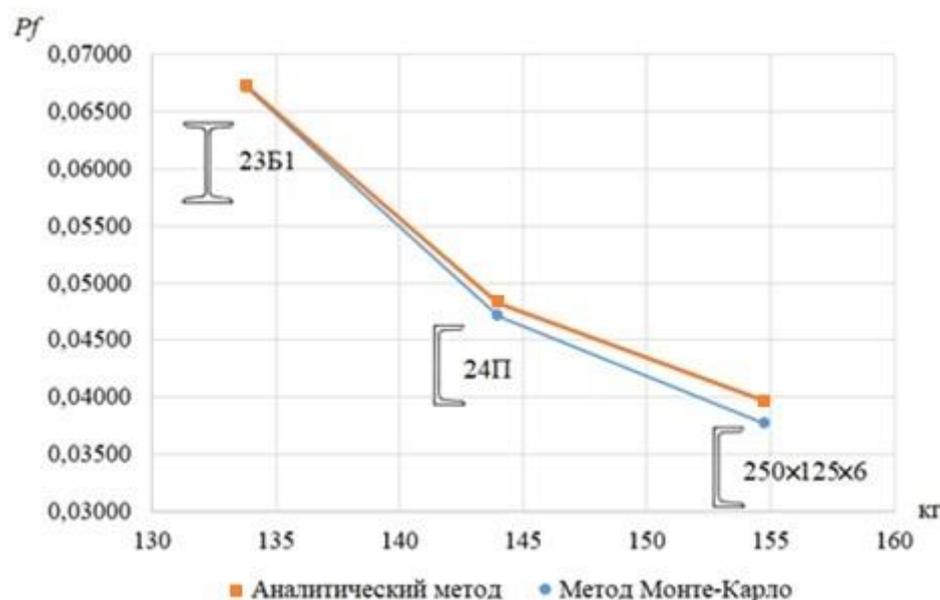


Рис. 1. График зависимости нижней границы вероятности отказа и массы балок настила

Из рис. 1 видно, что аналитический метод и метод Монте-Карло имеют хорошую сходимость, что позволяет рекомендовать использовать методы стохастической генерации в задачах анализа надежности стальных балок настила при соответствующем числе генераций (в примере было выполнено 100 000 генераций значений случайных величин).

Важной особенностью анализа надежности балок настила по II группе предельных состояний является нормирование предельных или целевых значений вероятности отказа. Использование аналогичных показателей для I группы



пределных состояний приведет к очевидному завышению металлоемкости стальных конструкций.

Так, в [8] предлагаются следующие значения вероятности отказа (табл. 3).

Таблица 3

**Целевые значения вероятностей отказа по [8]**

Уровень ответственности сооружения	Первая группа предельных состояний	Вторая группа предельных состояний
Низкий	0,000500	0,160
Средний	0,000070	0,070
Высокий	0,000008	0,023

В исследовании [9] приводятся значения допустимых индексов надежности и соответствующих вероятностей отказа для годовых периодов (табл. 4).

Таблица 4

**Вероятности отказа для интервала в 1 год по второй группе предельных состояний [9]**

Стоимость восстановления	Предельные значения
Высокая	$\beta = 1,3 (P_f = 10^{-1})$
Нормальная	$\beta = 1,7 (P_f = 5 \cdot 10^{-2})$
Низкая	$\beta = 2,3 (P_f = 10^{-2})$

**Выводы**

Использование вероятностных методов проектирования строительных конструкций позволяет ввести критерий надежности в технико-экономическое сравнение конструктивных вариантов. На численном примере показана сходимость аналитического и численного методов анализа надежности балок настила с использованием р-блоков, что позволяет рекомендовать использовать методы стохастической генерации в задачах анализа надежности стальных балок настила при соответствующем числе генераций (в примере было выполнено 100 000 генераций значений случайных величин). Вопрос нормирования целевого или предельного уровня вероятности отказа строительных конструкций по II группе состояний является открытым в РФ на текущий момент.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-01035, <https://rscf.ru/project/23-79-01035/>*

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Мкртычев, О. В. Теория надежности в проектировании строительных конструкций : монография / О. В. Мкртычев, В. Д. Райзер. – Москва : АСВ, 2016. – 906 с. – ISBN 978-5-4323-0189-5. – Текст : непосредственный.
2. Мкртычев, О. В. Определение коэффициентов надежности по ответственности для отдельных несущих элементов на основе вероятностного анализа / О. В. Мкртычев, О. С. Щедрин, Е. М. Лохова. – Текст : непосредственный // Вестник МГСУ. – 2022. – Том 17, Выпуск 10. – С. 1331–1346.
3. Engineering analysis with probability boxes: a review on computational methods / M. G. Faes, M. Daub, S. Marelli, E. Patelli, M. Beer // Structural Safety. – 2021. – Vol. 93. – P. 102092.



4. Соловьева, А. А. Расчет надежности элементов стальных ферм по критерию устойчивости с использованием р-блоков / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 1(294). – С. 45–53.

5. Design characteristics of structural steels based on statistical analysis of metallurgical products / J. Melcher, Z. Kala, M. Holický, M. Fajkus, L. Rozlívka // Journal of Constructional Steel Research. – 2004. – Vol. 60, № 3–5. – P. 795–808.

6. Interval Monte Carlo methods for structural reliability / H. Zhang, R. L. Mullen, R. L. Muhanna // Structural Safety. – 2010. – Vol. 32, № 3. – P. 183–190.

7. Соловьев, С. А. Методы оценки надежности стальных ферм с использованием р-блоков / С. А. Соловьев, А. А. Соловьева. – Вологда : Вологодский государственный университет, 2022. – 143 с. – ISBN 978-5-907606-02-9.

8. Marek, P. Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation / P. Marek, J. Brozzetti, M. Guštar. – Czech Republic, Prague : CAS, 2003. – 471 p.

9. Faber, M. H. Reliability Based Code Calibration / M. H. Faber, J. D. Sorensen. – Zürich, Switzerland : JCSS, 2002. – URL: <http://www.icss.byg.dtu.dk> (дата обращения: 10.07.2024).

**SOLOVEVA Anastasia Andreevna<sup>1</sup>, post-graduate student, senior teacher of the chair of industrial and civil engineering; SMIRNOV Vladimir Aleksandrovich<sup>2</sup>, candidate of technical sciences, associate professor of the chair of industrial and civil engineering, leading researcher; SOLOVEV Sergey Aleksandrovich<sup>3</sup>, candidate of technical sciences, associate professor of the chair of industrial and civil engineering**

### **PROBABILISTIC ANALYSIS OF THE STRUCTURAL RELIABILITY FOR STEEL BEAMS BASED ON P-BOXES**

<sup>1</sup>Vologda State University

15, Lenina St., Vologda, 160000, Russia. Tel.: +7 (8172) 72-46-45; fax: +7 (8172) 72-46-45; e-mail: solovevaa@vogu35.ru

<sup>2</sup>Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)

26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia. Tel.: +7 (495) 781-80-07

<sup>3</sup>Scientific-Research Institute of Building Physics of RAACS

21, Lokomotivniy Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation

*Key words:* reliability, failure probability, safety, p-box, optimization, steel trusses, probabilistic design.

---

*The article proposes a new method for probabilistic analysis of the reliability of steel beams with incomplete (limited) statistical data. P-boxes are used as models of random variables, which makes it possible to effectively take into account the aleatory and epistemological uncertainty of the data. The methodology developed allows for a technical and economic comparison of steel beams, based on an objective safety indicator - the failure probability. Information is provided on the possibility of rationing the reliability of structures for the 2nd group of limit states (serviceability limit state).*

---

### REFERENCES

1. Mkrtichev O. V., Rayzer V. D. Teoriya nadezhnosti v proektirovanii stroitelnykh konstrukciy [Reliability theory in structural design]. Moscow, ASV Publishing, 2016, 906 p.



2. Mkrtychev O. V. Shcedrin O. S., Lohova E. M. Opredelenie koeffitsientov nadezhnosti po otvetstvennosti dlya otdelnykh nesushchikh elementov na osnove veroyatnostnogo analiza [Determination of individual coefficients on the basis of probabilistic analysis]. Vestnik MGSU [MGSU Bulletin]. 2022, Vol. 17, № 10. P. 1331–1346.

3. Faes M. G., Daub M., Marelli S., Patelli E., Beer M. Engineering analysis with probability boxes: a review on computational methods. Structural Safety. 2021. Vol. 93. P. 102092.

4. Soloveva A. A., Solovev S. A. Raschet nadezhnosti elementov stalnykh ferm po kriteriyu ustoychivosti s ispolzovaniem p-blokov [Structural reliability analysis of steel truss elements on buckling using p-box approach]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2021, № 1(294). P. 45–53.

5. Melcher J., Kala Z., Holický M., Fajkus M., Rozlívka L. Design characteristics of structural steels based on statistical analysis of metallurgical products. Journal of Constructional Steel Research. 2004. Vol. 60. № 3-5. P. 795–808.

6. Zhang H., Mullen R. L., Muhanna R. L. Interval Monte Carlo methods for structural reliability. Structural Safety. 2010. Vol. 32. № 3. P. 183–190.

7. Solovev S. A., Soloveva A. A. Metody otsenki nadezhnosti stalnykh ferm s ispolzovaniem r-blokov [Structural reliability analysis of steel trusses using p-boxes]. Vologodskiy gos. un-t. Vologda, 2022, 143 p.

8. Marek, P. Brozzetti J., Guštar M. Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation. Czech Republic, Prague : CAS, 2003. 471 p.

9. Faber, M. H., Sorensen J. D. Reliability Based Code Calibration. Zurich. Switzerland: JCSS, 2002. – URL: <http://www.icss.byg.dtu.dk> (accessed: 10.07.2024).

© А. А. Соловьева, В. А. Смирнов, С. А. Соловьев, 2024

Получено: 21.08.2024 г.