



УДК 624.072.22

А. А. СОЛОВЬЕВА¹, аспирант, преп. кафедры промышленного и гражданского строительства; **В. А. СМIRHOV²**, канд. техн. наук, ведущий науч. сотрудник; **С. А. СОЛОВЬЕВ¹**, канд. техн. наук, доц. кафедры промышленного и гражданского строительства

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ СТАЛЬНЫХ ФЕРМ ПРИ НЕПОЛНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

¹ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»

Россия, 160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15. Тел.: (8172) 72-46-45;

факс: (8172) 72-46-45; эл. почта: solovevaaa@vogu35.ru

²Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ РААСН)

Россия, 113534, г. Москва, Локомотивный проезд, д. 21. Тел.: (495) 316-94-81;

эл. почта: belohvost@list.ru

Ключевые слова: надежность, вероятность отказа, безопасность, р-блок, оптимизация, стальные фермы, вероятностное проектирование.

Предложена новая методика вероятностного анализа надежности конструкций стальных ферм при неполной (ограниченной) статистической информации. В качестве моделей случайных величин используется р-блок, который позволяет эффективно учесть алеаторную и эпистемологическую неопределенности данных. Исследование отражает возможность проектировщика выполнять технико-экономическое сравнение конструкций стальных ферм исходя из объективного показателя безопасности – вероятности отказа.

Надежность строительного объекта – способность выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации. В соответствии с *Eurocode 0* “*Basis of structural design*”, надежность обычно выражается в вероятностных показателях. Наиболее распространенной количественной оценкой надежности является вероятность безотказной работы (или вероятность отказа).

Количественное выражение уровня безопасности эксплуатации стальных ферм в виде вероятности безотказной работы позволяет выполнять сравнение различных конструктивных решений по критерию надежности. На текущий момент, с проектной точки зрения, оптимальным считается такое техническое решение фермы, которое помимо соответствия техническому заданию и выполнению требований нормативной документации, имеет меньший вес конструкции и более выгодную экономическую составляющую (стоимость изготовления, монтажа и т. д.). Однако существуют расчетные ситуации, когда на основе вышеприведенных факторов, выбор конструктивного решения производится проектировщиком субъективно, без возможности оценить рациональность решения при одинаковых коэффициентах использования сечений стержней фермы.

Такие ситуации описаны в фундаментальной работе по теории надежности строительных конструкций В. Д. Райзера [1]: «У проектировщика практически отсутствует информация, насколько успешно им решена задача нормального



функционирования сооружения... Вполне возможны случаи, когда конструкции сооружений более ответственного класса оказываются менее надежны, чем конструкции сооружений наименее ответственного класса». Аналогичная информация приводится и в актуальном исследовании [2], где отмечается, что «метод предельных состояний позволяет обеспечить необходимый уровень надежности зданий и сооружений, что подтверждается опытом проектирования, строительства и эксплуатации. Однако данный метод имеет ряд недостатков, например, невозможно сказать, какой уровень надежности в количественном измерении формируется в результате применения норм проектирования, одинаков ли этот уровень надежности для зданий и сооружений различных конструктивных схем и выполненных из различных материалов».

В актуальных зарубежных исследованиях также отмечается, что «несмотря на то, что можно получить очень подробные численные прогнозы (на основе конечно-элементных моделей), эти результаты часто не достигают удовлетворительного уровня согласия с «реальностью», т. е. с действительным физическим поведением рассматриваемого континуума в эффективной эксплуатационной среде. Это несоответствие вызвано эпистемологической (сокращаемая неопределенность, вызванная недостатком знаний или данных) и алеаторной (несокращаемая неопределенность, возникающая из-за стохастической природы окружающей среды) неопределенностями модели» [3].

Надежность элемента строительной конструкции выражается в виде вероятности реализации события исчерпания резерва несущей способности элемента по заданной математической модели предельного состояния (для различных критериев работоспособности) в виде:

$$\tilde{g} = R(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k) - S(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \geq 0, \quad (1)$$

где S – функция, характеризующая обобщенную нагрузку (S – *stress*); R – функция, характеризующая обобщенную несущую способность (R – *resistance*); \tilde{x}_i – случайная величина (переменная функции S), $i = 1, 2, \dots, n$, где n – число случайных величин в функции S ; \tilde{y}_j – случайная величина (переменная функции R), $j = 1, 2, \dots, k$, где k – число случайных величин в функции R .

Пусть известна функция $f_g(g)$ плотности распределения вероятностей для резерва несущей способности g . Исходя из свойства функции плотности вероятности вида $\Pr(\xi \in [a; b]) = \int_a^b f_X(x) dx$, можно записать выражение для оценки вероятности отказа P_f элемента конструкции:

$$P_f = \Pr(g \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_g(g) dg. \quad (2)$$

Математическая модель предельного состояния стержня по критерию прочности стали имеет вид:

$$g = \tilde{N}_{i-j,ult} - \tilde{N}_{i-j}(\tilde{P}), \quad (3)$$



где $\tilde{N}_{i-j,ult}$ – случайная величина предельного значения усилия в элементе фермы; $\tilde{N}_{i-j}(\tilde{P})$ – случайная величина усилия в элементе фермы от нагрузки \tilde{P} .

Любое усилие в стержне фермы \tilde{N}_{i-j} может быть выражено в общем виде как:

$$\tilde{N}_{i-j}(\tilde{P}) = \tilde{P} \cdot \delta_{i-j}, \quad (4)$$

где δ_{i-j} – коэффициент, зависящий от геометрических размеров и формы фермы [4].

Для растянутых стержней фермы математическая модель предельного состояния представлена критерием прочности стали стержней:

$$\tilde{N}_{i-j,ult} = \tilde{\sigma}_{i-j,ult} \cdot \tilde{A}_{i-j}, \quad (5)$$

где $\tilde{\sigma}_{i-j,ult}$ – предельное напряжение стали для стержня $i-j$; \tilde{A}_{i-j} – площадь поперечного сечения стержня $i-j$.

Для сжатых стержней фермы математическая модель предельного состояния дополнительно представлена критерием устойчивости стержней. В этом случае могут быть использованы модели с аппроксимационными зависимостями для коэффициента устойчивости при центральном сжатии [4]. Так, для сечения из прямоугольных труб можно записать:

$$\tilde{N}_{i-j,ult} = \tilde{\sigma}_{i-j,ult} \cdot \tilde{A}_{i-j} \cdot \left(1,003 - 0,034 \cdot \lambda_{i-j}^2 \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{i-j,ult}}{E} \right), \quad (6)$$

где λ_{i-j} – гибкость стержня $i-j$; E – модуль упругости стали.

С помощью нормального (гуассовского) распределения, как правило, описывают показатели плотности, удельного веса материалов и размеры элементов строительных конструкций (в соответствии с п. 2.3 стандарта *Joint Committee on Structural Safety Probabilistic Model Code*).

Значение случайной величины усилия от собственного веса фермы \tilde{N}_{sw} на этапе проектирования зависит от значения случайных величин площади поперечного сечения и плотности материала ее элементов. Соответственно изменчивость \tilde{N}_{sw} можно представить как произведение коэффициента вариации веса и среднего значения усилия, полученного в программно-вычислительных комплексах. Другим вариантом определения значения случайной величины усилия от собственного веса фермы состоит в обработке статистических данных от произведения сгенерированных значений площадей (на основе равномерного распределения) поперечного сечения и плотности (на основе нормального распределения) стали.

Узловая нагрузка на ферму \tilde{P} является многокомпонентной случайной величиной $\tilde{P}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_k)$. Как было отмечено выше, нагрузку от собственного веса вышележащих конструкций допускается принимать распределенной нормально. В связи с этим суммарный эффект воздействия от веса вышележащих конструкций может быть представлен статистическими



параметрами (см. табл. 1): математическое ожидание $m_{P, str} = \sum_{i=1}^{k-1} m_{P,i}$,

среднеквадратическое отклонение $S_{P, str} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} S_{P,i}^2}$.

В качестве моделей случайных величин будут использоваться р-блоки [4]. т. к. при выбранных законах распределения случайных величин параметры данных функций в практических задачах представлены в виде доверительных интервалов, то на их основе можно получить несколько различных вариантов функций распределения вероятностей. Также возможны расчетные ситуации, когда под одну и ту же выборку данных одинаково хорошо могут подходить несколько различных распределений вероятностей случайной величины. Для учета таких неопределенностей используется р-блок, который является областью, ограниченной двумя функциями распределения вероятностей, внутри которой находится действительная функция распределения.

Смоделируем ситуацию выбора типа конструкции фермы пролетом 18 метров и поперечных сечений ее элементов в виде прямоугольных труб, рассчитав три различных типа фермы: «Молодечно», с параллельными поясами и треугольную, с различными вариантами поперечных сечений стержней (в 5 вариантах каждая).

Параметры случайных величин приведены в табл. 1.

Таблица 1

Сбор нагрузок в вероятностной постановке

Наименование нагрузки	Ед. изм.	Нормативное значение	Распределение вероятностей	Интервал математического ожидания	Интервал среднеквадратического отклонения
Постоянная нагрузка					
1. Профнастил Н75-750-0,8	Н	1340,00	нормальное	[1307,70; 1370,70]	[10,20; 10,80]
2. Утеплитель минераловатные жесткие плиты (250/30)	Н	1360,00	нормальное	[1159,20; 1555,20]	[56,40; 75,60]
3. Утеплитель минераловатные полужесткие плиты (120/80)	Н	1730,00	нормальное	[1524,60; 1942,20]	[61,20; 77,90]
4. Пароизоляция	Н	18,00	нормальное	180,00	0
5. Профнастил Н75-750-0,8	Н	1340,00	нормальное	[1307,70; 1370,70]	[10,20; 10,80]
6. Прогон 16П	Н	853,14	нормальное	[766,26; 940,02]	
Кратковременная нагрузка					
7. Снеговая нагрузка для IV района	кН	36,0	гумбеля	[19,83; 22,15]	[8,08; 9,23]
Прочность стали					
S345	МПа		нормальное	[372,53; 381,19]	[12,33; 18,89]
S255	МПа		нормальное	[278,12; 287,48]	[12,81; 18,75]

Функция распределения для площади поперечных сечений стержней принята равномерной, т. к. существуют известные нормативные границы допустимых отклонений площади поперечных стержней, распределение вероятностей внутри которых сложно оценить вследствие различных технологий производства и контроля качества профилей [5].

После вычисления вероятности безотказной работы для каждого стержня в отдельности выполняется анализ надежности фермы как последовательной системы, в которой отказ одного элемента приводил бы к отказу всей системы.

Сводная таблица критериев выбора конструктивного решения фермы представлена в табл. 2.

Таблица 2

Сводная таблица для анализа конструктивных решений ферм

Тип фермы	Масса, кг	Максимальный коэффициент использования	Вероятность безотказной работы фермы
Ферма «Молодечно»			
M1	532,83	0,95	[0,98722 ; 0,99806]
M2	532,83	0,96	[0,98769 ; 0,99806]
M3	551,92	0,95	[0,98948 ; 0,99932]
M4	528,26	0,95	[0,98369 ; 0,99798]
M5	576,04	0,99	[0,98874 ; 0,99809]
Ферма с параллельными поясами			
П1	611,08	0,90	[0,99181 ; 0,99964]
П2	611,08	0,96	[0,99160 ; 0,99965]
П3	604,11	0,89	[0,99145 ; 0,99953]
П4	606,73	0,92	[0,99086 ; 0,99963]
П5	630,56	0,89	[0,99564 ; 0,99969]
Треугольная ферма			
T1	675,40	0,94	[0,98295 ; 0,99657]
T2	698,99	0,94	[0,98811 ; 0,99841]
T3	624,45	0,94	[0,97990 ; 0,99707]
T4	650,08	0,94	[0,98269 ; 0,99657]
T5	675,40	0,94	[0,98284 ; 0,99658]

Представим графически зависимость вероятности безотказной работы фермы от ее массы на рис. 2.

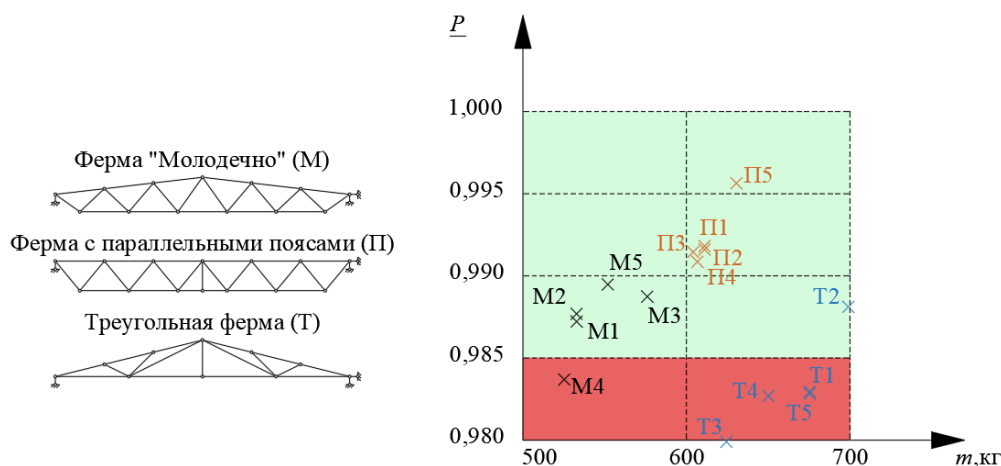


Рис. 2. График зависимости нижней границы вероятности безотказной работы и массы фермы



Коэффициент использования элементов фермы не всегда является объективным показателем надежности и безопасности для строительной конструкции как системы: по отдельным значениям невозможно сделать вывод о коэффициенте использования конструкции в целом, что не позволяет сравнить несколько различных вариантов технических решений.

Как видно из анализа, фермы «Молодечно» с техническими решениями М1 и М2 имеют одинаковую массу, однако нижняя граница вероятности безотказной работы варианта М2 выше, что косвенно отражается и в повышении максимального коэффициента использования. Тем не менее при одинаковом максимальном коэффициенте использования 0,95 для решений М1 и М3, надежность фермы М3 выше на 0,23 % (что существенно в показателе вероятности безотказной работы). Вес М3 на 4,5 % выше веса М5, однако, нижняя граница вероятности безотказной работы варианта М5 больше. Ферма М4 имеет наименьший вес и проходит по 1-й группе предельных состояний, однако имеет довольно широкие границы вероятности безотказной работы. Если принять условно предельную допустимую надежность фермы как системы 0,985, то техническое решение М4 не проходит по уровню безопасности.

Фермы с параллельными поясами достигают аналогичного уровня вероятности безотказной работы при большей металлоемкости. В целом фермы групп М и П отражают линейную зависимость надежности от металлоемкости на рассматриваемом участке. С повышением уровня металлоемкости функция зависимости примет экспоненциальный вид и будет асимптотически приближаться к единице. По данному графику можно определить целесообразность повышения металлоемкости фермы с точки зрения повышения надежности – каждый раз с повышением металлоемкости на условное количество единиц (например, на 50 кг массы фермы) надежность будет повышаться на все меньшее значение относительно предыдущего участка.

Треугольные фермы, имея большую по сравнению с представленными массу, при единых моделях случайных параметров демонстрируют более широкие границы вероятности безотказной работы, отражая их высокую металлоемкость для необходимости достижения требуемого уровня надежности.

Согласно рис. 2, фермы «Молодечно» [6] имеют минимальную массу со средними показателями вероятности безотказной работы, фермы с параллельными поясами по представленным результатам в интервале [9,46 %; 14,36 %] значительно увеличивают показатели нижней границы вероятности безотказной работы системы. Треугольные фермы показывают значительное увеличение массы с уменьшением нижней границы вероятности безотказной работы.

Для более объективного сравнения конструктивных решений, график по рис. 2 необходимо представить в осях «вероятность безотказной работы» – «стоимость проектного решения (включая изготовление, монтаж)», т. к. металлоемкость фермы не всегда может отражать полный спектр затрат на реализацию проектного решения.

Вывод

В исследовании продемонстрирован новый подход к технико-экономической оптимизации проектных решений стальных ферм, который включает в себя фактор надежности в количественном выражении. Оптимальным решением является установить нормативный уровень вероятности безотказной



работы для каждого вида строительной конструкции индивидуально исходя из значения риска как произведения вероятности отказа на сумму ущерба от последствий отказа.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-79-01035, <https://rscf.ru/project/23-79-01035/>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мкртычев, О. В. Теория надежности в проектировании строительных конструкций : монография / О. В. Мкртычев, В. Д. Райзер. – Москва : АСВ, 2016. – 906 с. – ISBN 978-5-43230189-5. – Текст : непосредственный.
2. Мкртычев, О. В. Определение коэффициентов надежности по ответственности для отдельных несущих элементов на основе вероятностного анализа / О. В. Мкртычев, О. С. Щедрин, Е. М. Лохова. – Текст : непосредственный // Вестник МГСУ. – 2022. – Том 17. – Выпуск 10. – С. 1331–1346.
3. Engineering analysis with probability boxes : a review on computational methods / Faes M. G., Daub M., Marelli S. [et al.] // Structural Safety. – 2021. – Vol. 93. – P. 1–31. – DOI:10.1016/j.strusafe.2021.102092.
4. Соловьева, А. А. Расчет надежности элементов стальных ферм по критерию устойчивости с использованием р-блоков / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 1 (294). – С. 45–53.
5. Design characteristics of structural steels based on statistical analysis of metallurgical products / J. Melcher, Z. Kala, M. Holický [et al.] // Journal of Constructional Steel Research. – 2004. – Volume 60. – № 3-5. – P. 795–808.
6. Сафронов, В. С. Надежность стропильной фермы покрытия из тонкостенных профилей "Молодечно" / В. С. Сафронов, П. Ун. – Текст : непосредственный // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 2 (33). – С. 123–132.
7. Kanda, J. Target structural reliability in life cycle consideration / J. Kanda, T. Takada, H. Choi // International Journal of Risk Assessment and Management. – 2007. – Volume 7. – № 6-7. – P. 846–861.
8. Trbojevic, V. M. Another look at risk and structural reliability criteria / V. M. Trbojevic // Structural Safety. – 2009. – Vol. 31. – № 3. – P. 245–250.

SOLOVYOVA Anastasiya Andreevna¹, post-graduate student, teacher of the industrial and civil engineering department; SMIRNOV Vladimir Aleksandrovich², candidate of technical sciences, leading researcher; SOLOVYOV Sergey Aleksandrovich¹, candidate of technical sciences, associate professor of the industrial and civil engineering department

PROBABILISTIC ANALYSIS OF STEEL TRUSSES STRUCTURAL RELIABILITY WITH INCOMPLETE STATISTICAL DATA

¹Vologda State University

15, Lenin St., Vologda, 160000, Russia. Tel.: + 7 (8172) 72-46-45; fax: + 7 (8172) 72-46-45; e-mail: solovevaaa@vogu35.ru

²Research Institute of Structural Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (NIISF RAASN)

21, Lokomotivny Dr., Moscow, 113534, Russia. Tel.: +7 (495) 316-94-81

Key words: reliability, failure probability, safety, p-box, optimization, steel trusses, probabilistic design.



The article proposes a new method of probabilistic analysis of the steel trusses structural reliability with incomplete (limited) statistical data. The p-box is used as models of random variables, which makes it possible to effectively take into account the aleatory and epistemic uncertainty of the data. As a result of the research, it reflects the ability of a civil engineer to perform a technical and economic comparison of steel truss structures based on an objective safety indicator - the failure probability.

REFERENCES

1. Mkrtichev O. V., Rayzer V. D. Teoriya nadezhnosti v proektirovanii stroitelnykh konstruksiy [Reliability theory in structural design] : monografiya. Moscow: ASV, 2016. 906 p. – ISBN 978-5-43230189-5.
2. Mkrtichev O. V. Schedrin O. S., Lokhova E. M. Opredelenie koeffitsientov nadyozhnosti po otvetstvennosti dlya otdelnykh nesushchikh elementov na osnove veroyatnostnogo analiza [Determination of individual coefficients on the basis of probabilistic analysis]. Vestnik MGSU [MGSU Bulletin]. 2022. Vol. 17. № 10. P. 1331–1346.
3. Faes M. G., Daub M., Marelli S., Patelli E., Beer M. Engineering analysis with probability boxes: a review on computational methods. Structural Safety. 2021. Vol. 93. P. 1–31. – DOI:10.1016/j.strusafe.2021.102092.
4. Solovyova A. A., Solovyov S. A. Raschyot nadyozhnosti elementov stalnykh ferm po kriteriyu ustoychivosti s ispolzovaniem p-blokov [Structural reliability analysis of steel truss elements on buckling using p-box approach]. Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzheniy [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2021. № 1(294). P. 45–53.
5. Melcher J., Kala Z., Holický M., Fajkus M., Rozlívka L. Design characteristics of structural steels based on statistical analysis of metallurgical products / Journal of Constructional Steel Research. 2004. Vol. 60. № 3-5. P. 795–808.
6. Safronov V. S., Un P. Nadyozhnost stropilnoy fermy pokrytiya iz tonkostennykh profiley "Molodechno" [Reliability of the roof truss of thin-wall profiles "Molodechno"]. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii [Structural Mechanics and Structures]. 2022. № 2(33). P. 123–132.
7. Kanda J., Takada T., Choi H. Target structural reliability in life cycle consideration. International Journal of Risk Assessment and Management. 2007. Vol. 7. № 6–7. P. 846–861.
8. Trbojevic V. M. Another look at risk and structural reliability criteria. Structural Safety. 2009. Vol. 31. № 3. P. 245–250.

© А. А. Соловьева, В. А. Смирнов, С. А. Соловьев, 2023

Получено: 25.10.2023 г.