



УДК 539.3

**В. И. ЕРОФЕЕВ<sup>1</sup>**, д-р физ.-мат. наук, проф., директор; **А. О. ЛЕНИН<sup>1</sup>**, аспирант; **А. С. ПУПЫНИН<sup>1</sup>**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; **И. С. ТАРАСОВ<sup>2</sup>**, канд. техн. наук, доц. кафедры подъемно-транспортных машин и машиноремонта

## О СООТНОШЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ УПРУГИХ ВОЛН ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ И ВЫСШИХ ГАРМОНИК В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук»

Россия, 603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, д. 85. Тел.: (831) 432-03-00; эл. почта: erof.vi@yandex.ru

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Волжский государственный университет водного транспорта»

Россия, 603950, г. Н. Новгород, ул. Нестерова, д. 5. Тел.: (831) 218-44-13; эл. почта: otd\_o@vsuwt.ru

*Ключевые слова:* стержень, нелинейность, упругая волна, основная частота, высшие гармоники.

---

*Публикуемая работа посвящена исследованию соотношений скоростей упругих волн основной частоты и высших гармоник, которые позволяют определить степень искажения формы зондирующего акустического сигнала, распространяющегося в элементе конструкции.*

---

### Введение

Техническое состояние высоконагруженных элементов как эксплуатируемых, так и вновь возводимых сооружений нуждается в мониторинге. Аналогичные требования предъявляются и к ответственным элементам конструкций и изделий машиностроения, наземного, водного, воздушного и трубопроводного транспорта.

Современные методики мониторинга часто базируются на методах нелинейной акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов и конструкций, для разработки которых важно знать закономерности распространения интенсивных вибраций (продольных, крутильных и изгибных волн) в стержнях и стержневых системах. В одних случаях стержень непосредственно представляет собой элемент строительной конструкции или элемент изделия машиностроения, в других случаях стержень является лабораторным образцом испытываемого материала.

На основе анализа нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих распространение интенсивных продольных, крутильных и изгибных вибраций (волн) в стержне сделана оценка того, как сильно отличаются скорости основных возмущений и высших гармоник в области частот, где для стержней наличествует дисперсия.

### Продольные вибрации стержней

Распространение интенсивных вибраций в стержне описывается нелинейным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \left[ 1 + \alpha_n \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^n \right] \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Если вибрации продольные, то  $c = c_0 = \sqrt{E/\rho}$  – скорость продольной волны;  $U = U(x, t)$  – продольное перемещение частиц срединной линии стержня;

$$\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{2E} + \frac{A}{3E} + \frac{B}{E} (1 - 2\nu) + \frac{C}{3E} (1 - 6\nu),$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\lambda$  – константа Ламе второго порядка;  $A, B, C$  – константы Ландау третьего порядка;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\rho$  – плотность материала.

Для продольных вибраций  $n = 1$ , нелинейность квадратичная. При распространении возмущения частоты  $\omega$  основная гармоника за счет такой нелинейности будет генерировать возмущения на частоте  $2\omega$  (вторая гармоника). Затем взаимодействие возмущений на частотах  $\omega$  и  $2\omega$  породит возмущение на частоте  $3\omega$  (третья гармоника). Будет происходить эффективный перенос энергии вверх по спектру.

Отсутствие в системе (1) дисперсии приведет к тому, что возмущения на частотах  $2\omega, 3\omega$  и т. д. будут распространяться с той же скоростью, что и возмущение на основной частоте. Профиль волны синусоидальный изначально будет сильно отличаться от типового – профиль волны будет укручиваться по мере распространения. Эволюция синусоидальной волны и формирование волны Римана схематично изображены на рис. 1.

Известно [1–4], что высокочастотные продольные, крутильные и изгибные волны обладают дисперсией. Для их описания технических теорий уже недостаточно, и требуется применение уточненных стержневых моделей.

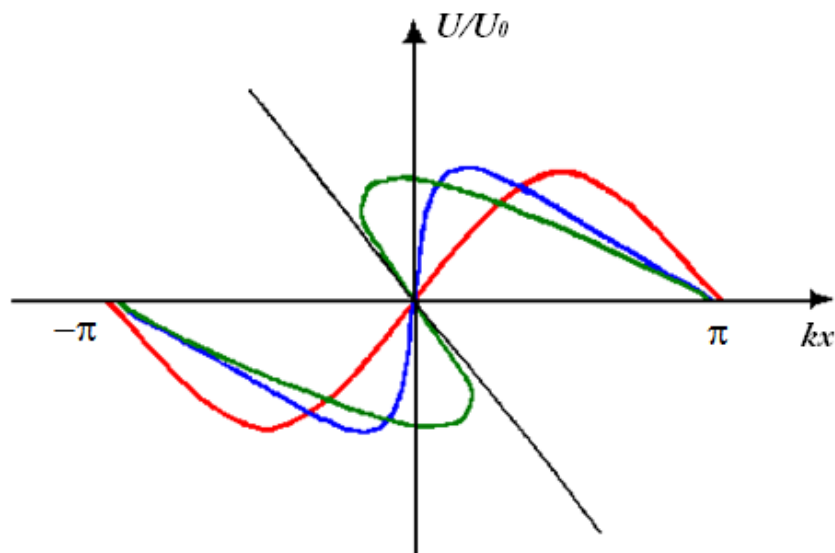


Рис. 1. Эволюция синусоидальной волны и формирование волны Римана



Оценим, как сильно будут отличаться скорости основных возмущений и высших гармоник интенсивных вибраций в области частот, где для стержней присутствует дисперсия.

Интенсивные продольные волны в стержне описываются уравнением:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c_0^2 \left( 1 - \alpha_n \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu^2 R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $R = \sqrt{\frac{I_0}{F}}$  – полярный радиус инерции;  $I_0 = \iint_F (y^2 + z^2) dF$  – полярный момент инерции.

Уравнение (2) обобщает известную модель Бишопа [1–4] на случай учета нелинейных факторов. Авторами работы [5] (впервые его получившими) это уравнение было названо нелинейным уравнением Бишопа, а в работах [6, 7] его называют уравнением «с двумя дисперсиями».

Для анализа дисперсионных зависимостей воспользуемся линеаризованным вариантом уравнения (2), предварительно приведя его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{x} = \frac{x}{R}$ ;  $\tilde{t} = \frac{c_0 t}{R}$ ;  $\tilde{U} = \frac{U}{R}$ .

Отношение при  $\nu = 0,3$ .

$$\frac{c_\tau^2}{c_0^2} = \frac{\mu}{E} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \approx 0,385.$$

Частота и волновое число для (3) связаны дисперсионным уравнением

$$\frac{c_\tau^2}{c_0^2} k^4 + (1 - \omega^2) k^2 - \omega^2 = 0, \quad (4)$$

имеющим следующие корни:

$$k_{1,2,3,4} = \pm \frac{c_0}{\sqrt{2} c_\tau} \left[ \omega^2 - 1 \pm \sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + 4\omega^2 \frac{c_\tau^2}{c_0^2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Выражения для фазовой и групповой скоростей получаются из соотношений  $v_{\text{фаз}}(\omega) = \omega/k$  и  $v_{\text{гр}}(\omega) = d\omega/dk$  соответственно, где  $k$  подставляется из выражения (5).

Сравним фазовые скорости волн на частотах  $\omega$  и  $2\omega$ ;  $\omega$  и  $3\omega$ . Отношение  $v_{\text{фаз}}(2\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$  изображено на рис. 2, а отношение  $v_{\text{фаз}}(3\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$  изображено на рис. 3.

Максимальное отклонение отношения  $v_{\text{фаз}}(2\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$  от единицы составляет не более 18 %, минимальное не превосходит 2 %.

Максимальное отклонение отношения  $v_{\text{фаз}}(3\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$  от единицы не превышает 25 %, минимальное – 2 %.

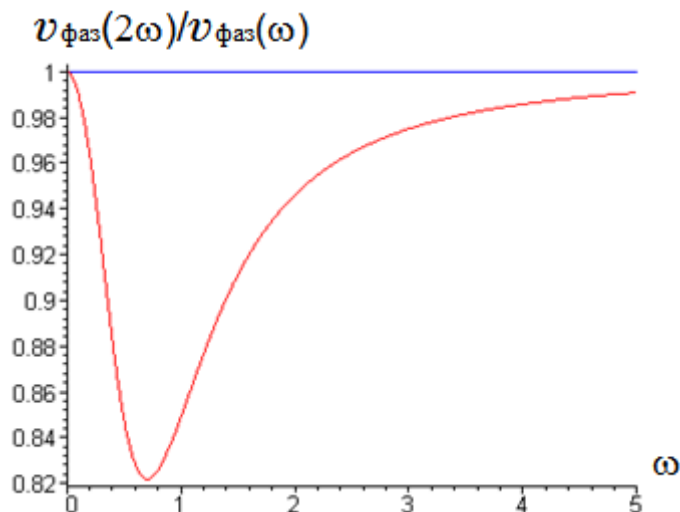


Рис. 2. Отношение фазовых скоростей на частотах  $\omega$  и  $2\omega$

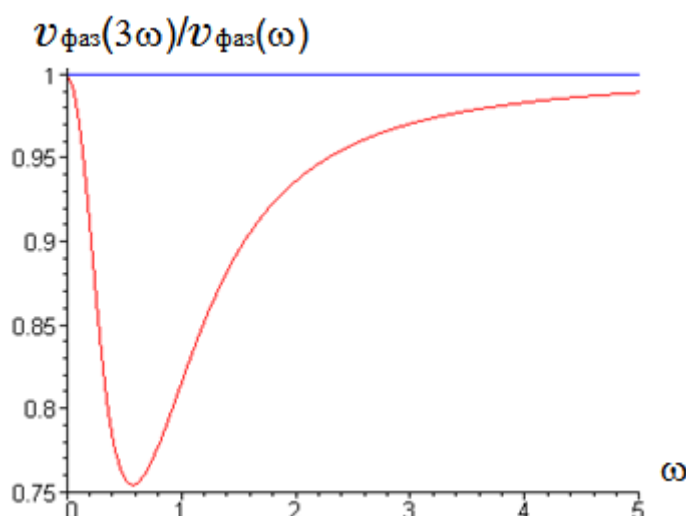
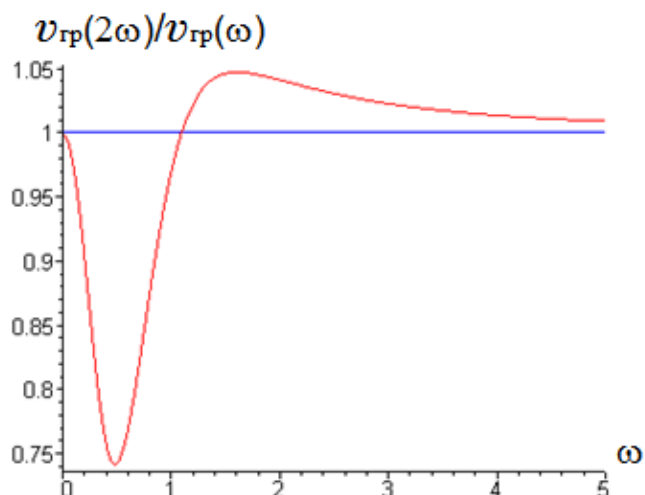
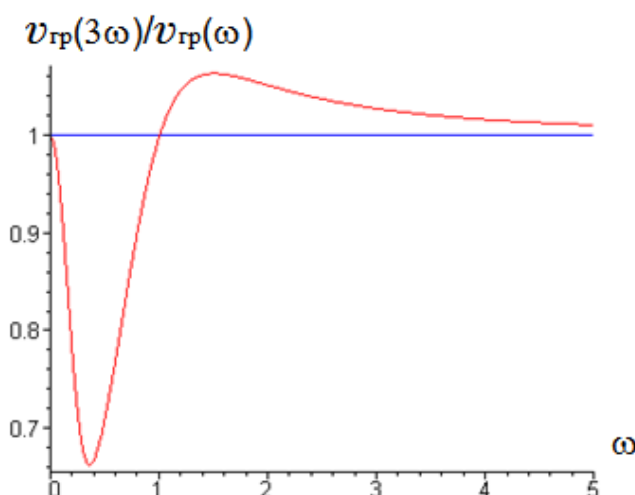


Рис. 3. Отношение фазовых скоростей на частотах  $\omega$  и  $3\omega$

Сравнение групповых скоростей волн на частотах  $\omega$  и  $2\omega$ ;  $\omega$  и  $3\omega$  (рис. 2, рис. 3) показывает, что максимальное отклонение отношения  $v_{\text{гр}}(2\omega)/v_{\text{гр}}(\omega)$  от единицы составляет не более 30 %, а минимальное – не более 2 %. Максимальное отклонение отношения  $v_{\text{гр}}(3\omega)/v_{\text{гр}}(\omega)$  от единицы – не более 36 %, минимальное – не более 1 %.

Рис. 4. Отношение групповых скоростей на частотах  $\omega$  и  $2\omega$ Рис. 5. Отношение групповых скоростей на частотах  $\omega$  и  $3\omega$ 

Следовательно, в широком частотном диапазоне основное возмущение и его гармоники хорошо синхронизированы по скорости, и наличие нелинейности приведет к формированию волн, профили которых будут далеки от синусоидальных.

#### **Крутильные волны**

Распространение интенсивных вибраций в стержне описывается нелинейным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \left[ 1 + \alpha_n \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^n \right] \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Если вибрации крутильные, то  $c = c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ ;  $U = \theta(x, t)$  – угол поворота поперечного сечения;



$$\alpha_n = 9 \left( 1 + \frac{\lambda}{2\mu} + \frac{A}{2\mu} + \frac{B}{\mu} + \frac{J}{\mu} \right),$$

где  $\mu$  – константа Ламе второго порядка;  $J$  – константа Ландау четвертого порядка.

Для крутильных вибраций  $n = 2$ , нелинейность кубическая. При распространении возмущения частоты  $\omega$  (основная гармоника) за счет такой нелинейности будет генерироваться возмущение на частоте  $3\omega$  (третья гармоника). Затем взаимодействие возмущений на частотах  $\omega$  и  $3\omega$  породит возмущение на частоте  $4\omega$  (четвертая гармоника). Будет происходить эффективный перенос энергии вверх по спектру. Отсутствие дисперсии и в этом случае приводит к тому, что возмущения на основной частоте и высшие гармоники будут распространяться с одинаковыми скоростями. Профиль волны из синусоидального превратится в ангармонический. Эволюция крутильной волны качественно может быть проиллюстрирована тем же рисунком.

Интенсивные крутильные волны в стержне описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_k^2 \left( 1 + \alpha_n \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\varphi}{I_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (7)$$

где  $I_\varphi = \iint_F \varphi^2(y, z) dF$  – момент депланации;  $\varphi$  – функция кручения;  $c_k$  – скорость, с которой распространялась бы крутильная волна, если бы не было депланации (т. е. выхода при кручении поперечного сечения стержня из первоначального плоского состояния). Эта скорость отличается от скорости волны сдвига на постоянный множитель, зависящий от формы поперечного сечения стержня:

$$c_{кр} = c_\tau \sqrt{\frac{I_{кр}}{I_0}}. \quad (8)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение Власова, обобщенное на случай учета нелинейных факторов. Для оценки дисперсионных зависимостей воспользуемся классическим (линейным) уравнением Власова, которое в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{c_0^2}{c_k^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\tilde{x} = x\sqrt{I_0/I_\varphi}$ ;  $\tilde{t} = c_k t\sqrt{I_0/I_\varphi}$ ;  $\tilde{\theta} = \theta$ . Отношение  $c_0^2/c_k^2 \approx 2$ .

Частота и волновое число для (9) связаны дисперсионным уравнением

$$\frac{c_0^2}{c_k^2} k^4 + (1 - \omega^2)k^2 - \omega^2 = 0, \quad (10)$$

имеющим следующие корни

$$k_{1,2,3,4} = \pm \frac{c_\tau}{\sqrt{2c_0}} \left[ \omega^2 - 1 \pm \sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + 4\omega^2 \frac{c_0^2}{c_\tau^2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Выражения для фазовой и групповой скоростей получаются из соотношений  $v_{\text{фаз}}(\omega) = \omega/k$  и  $v_{\text{гр}}(\omega) = d\omega/dk$  соответственно, где  $k$  подставляется из выражения (11) (сами выражения не приводятся ввиду их громоздкости).

При условии  $c_0 > c_k$  (а это, как правило, так), дисперсия носит аномальный характер, поскольку групповая скорость волнового пакета оказывается больше фазовой скорости отдельных гармоник.

Сравним фазовые скорости волн на частотах  $\omega$  и  $3\omega$ . Отношение  $v_{\text{фаз}}(3\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$  изображено на графике (рис. 6).

Максимальное отклонение отношения  $v_{\text{фаз}}(3\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$  от единицы не превышает 17 %, минимальное – не более 2 %.

Сравнение групповых скоростей волн на частотах  $\omega$  и  $3\omega$  приведено на рис. 7. Максимальное отклонение отношения  $v_{\text{гр}}(3\omega)/v_{\text{гр}}(\omega)$  не превышает 26 %, минимальное – не более 5 %.

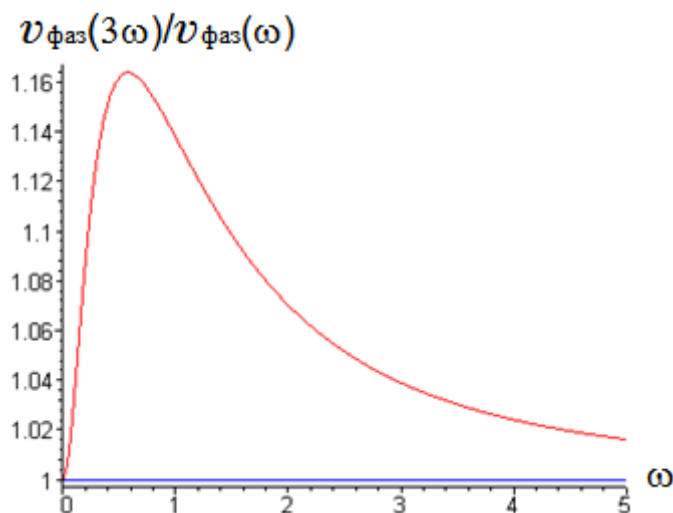


Рис. 6. Отношение фазовых скоростей на частотах  $\omega$  и  $3\omega$

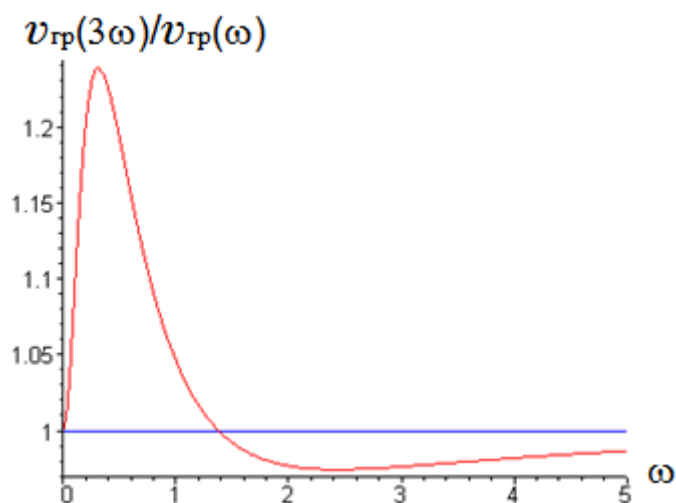


Рис. 7. Отношение групповых скоростей на частотах  $\omega$  и  $3\omega$



Проведенный анализ показал, что и для крутильных волн в широком частотном диапазоне основное возмущение и его гармоники хорошо синхронизированы по скорости, и наличие нелинейности приведет к формированию резких перепадов в профиле волны.

### Изгибные волны

Изгибные волны ни в каком приближении не описываются волновым уравнением. Интенсивные вибрации описываются уравнением:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c_0^2 r_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{c_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3, \quad (12)$$

где  $W$  – поперечное перемещение частиц срединной линии;  $r_y^2 = I_y/F$  – осевой радиус инерции;  $I_y = \iint_F z^4 dF$  – осевой момент инерции.

Для анализа дисперсионных зависимостей воспользуемся линеаризованным вариантом уравнения (12), предварительно приведя его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} + \frac{r_y^2}{\Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial x'^4} = 0, \quad (13)$$

где  $x' = x/\Lambda$ ;  $t' = c_0 t/\Lambda$ ;  $U = W/U_0$ ;  $U_0 \sim \sqrt{\varepsilon_0} \Lambda$  – максимальная амплитуда изгибной волны;  $\Lambda$  – характерная длина волны;  $\varepsilon_0 \sim 10^4$  – характерная величина упругих деформаций.

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega = \pm \frac{r_y}{\Lambda} k^2. \quad (14)$$

Выражения для фазовой и групповой скоростей имеют вид соответственно

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{r_y}{\Lambda}} \sqrt{\omega}, \quad (15)$$

$$v_{\text{гр}} = 2 \sqrt{\frac{r_y}{\Lambda}} \sqrt{\omega}. \quad (16)$$

Сравним фазовые и групповые скорости волн на частотах  $\omega$  и  $3\omega$ . Их отношение будет равно  $\sqrt{3}$ :

$$\frac{v_{\text{фаз}}(3\omega)}{v_{\text{фаз}}(\omega)} = \sqrt{3}, \quad (17)$$

$$\frac{v_{\text{гр}}(3\omega)}{v_{\text{гр}}(\omega)} = \sqrt{3}. \quad (18)$$

То есть скорости изгибных волн основной частоты и третьей гармоники отличаются между собой не на проценты (как для продольной и крутильной волн), а в разы. Синхронизировать такие волны затруднительно, эффективного обмена энергией между гармониками не будет, следовательно, гармонические волны, распространяясь по стержню, превратятся в квазигармонические, но не станут существенно несинусоидальными.

Уравнение динамики стержня, совершающего изгибные колебания и лежащего при этом на нелинейно-упругом основании, имеет вид:

$$\rho F U_{tt} + EI_y U_{xxxx} + hU + h_1 U^3 = 0, \quad (19)$$

где  $h$  – жесткость упругого основания;  $h_1$  – характеризует нелинейную добавку к жесткости.





Частота и волновое число гармонической волны связаны соотношением

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{EI_y k^4 + h}{\rho F}}, \quad (20)$$

Соотношение (20) получено из дисперсионного уравнения

$$\rho F \omega^2 = EI_y k^4 + h, \quad (21)$$

Минимальное по модулю значение  $\omega = \sqrt{h/(\rho F)}$  достигается при  $k = 0$ .

Выражение волнового числа  $k$  через частоту  $\omega$  получается также из дисперсионного уравнения

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt[4]{\frac{\rho F \omega^2 - h}{EI_y}}, \quad (22)$$

Выражения для фазовой и групповой скорости получаются из соотношений  $v_{\text{фаз}}(\omega) = \omega/k$  и  $v_{\text{гр}}(\omega) = d\omega/dk$  соответственно, где  $k$  подставляется из выражения (22).

Выражение для фазовой скорости имеет вид

$$v_{\text{фаз}} = \omega \left( \frac{EI_y}{\rho F \omega^2 - h} \right)^{1/4}. \quad (23)$$

Сравним фазовые скорости с частотами  $\omega$  и  $3\omega$ . Отношение  $v_{\text{фаз}}(3\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$  изображено на графике (рис. 8).

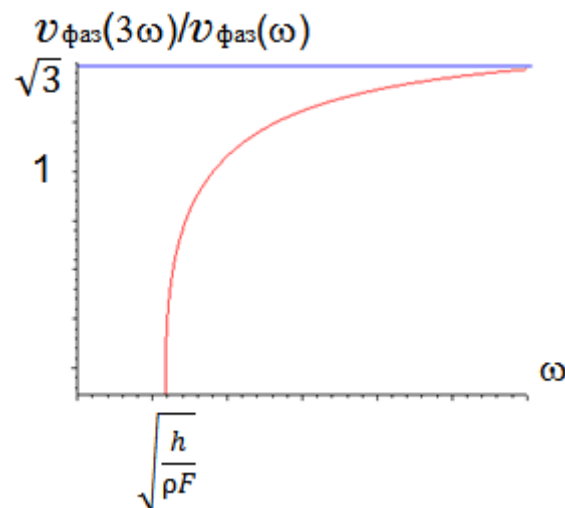


Рис. 8. Отношение фазовых скоростей на частотах  $\omega$  и  $3\omega$

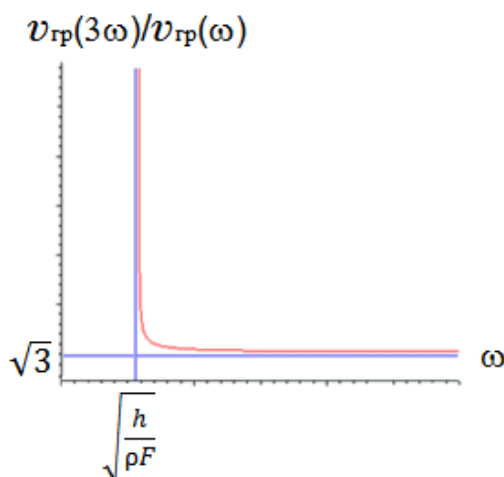


Рис. 9. Отношение групповых скоростей на частотах  $\omega$  и  $3\omega$

Проанализировав поведение  $v_{\text{фаз}}(3\omega)/v_{\text{фаз}}(\omega)$ , получим, что при  $\omega \rightarrow \infty$  отношение фазовых скоростей стремится к значению  $\sqrt{3}$ .

Выражение для групповой скорости имеет вид

$$v_{\text{гр}} = 2 \frac{\sqrt[4]{EI_y}(\rho F \omega^2 - h)^{3/4}}{\rho F \omega}. \quad (24)$$

Сравним групповые скорости с частотами  $\omega$  и  $3\omega$ . Отношение  $v_{\text{гр}}(3\omega)/v_{\text{гр}}(\omega)$  изображено на графике (рис. 9).

Проанализировав поведение  $v_{\text{гр}}(3\omega)/v_{\text{гр}}(\omega)$ , получим, что при  $\omega \rightarrow \infty$  отношение групповых скоростей стремится к значению  $\sqrt{3}$ , то есть скорости изгибных волн основной частоты и третьей гармоники отличаются между собой не на проценты (как для продольной и крутильной волн), а в разы. Синхронизировать такие волны затруднительно, эффективного обмена энергией между гармониками не будет, следовательно, гармонические волны, распространяясь по стержню, превратятся в квазигармонические, но не станут существенно несинусоидальными.

### Заключение

В результате проведенных аналитических исследований показано, что для продольных и крутильных волн, распространяющихся в стержне, в широком частотном диапазоне основное возмущение и его гармоники хорошо синхронизованы по скорости и наличие нелинейности приведет к формированию резких перепадов в профилях волн, делая эти профили далекими от синусоидальных. Скорости же изгибных волн основной частоты и высших гармоник отличаются между собой не на проценты (как для продольной и крутильной волн), а в разы. Синхронизировать такие волны затруднительно, эффективного обмена энергией между гармониками не будет, следовательно, гармонические волны, распространяясь по стержню, превратятся в квазигармонические, но не станут существенно несинусоидальными.

*Работа выполнена в рамках государственного задания на фундаментальные научные исследования на 2021–2023 годы по теме № 0030-2021-0025.*



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артоболевский, И. И. Введение в акустическую динамику машин / И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин. – Москва : Наука. – 1979. – 296 с. – Текст : непосредственный.
2. Григолюк, Э. И. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. – Москва : ВИНТИ, 1973. – 272 с. – Текст : непосредственный.
3. Вибрации в технике : справочник. В 6 томах. Том 1. Колебания линейных систем / под редакцией В. В. Болотина. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Машиностроение, 1999. – 504 с. – Текст : непосредственный.
4. Ерофеев, В. И. Волны в стержнях : Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Н. П. Семерикова. – Москва : Физматлит, 2002. – 208 с. – ISBN 5-9221-0294-X. – Текст : непосредственный.
5. Ерофеев, В. И. Нелинейные модели продольных колебаний стержней / В. И. Ерофеев, А. И. Потапов. – Текст : непосредственный // Гидроаэромеханика и теория упругости : Всесоюзный межвузовский сборник / Днепропетровский государственный университет им. 300-летия Воссоединения Украины и Россией. – Днепропетровск, 1984. – Выпуск 32. – С. 78–82.
6. Samsonov, A. M. Strain solitons in solids and how to construct them / A. M. Samsonov. – Chapman & Hall / CRC, 2001. – 230 p. – ISBN 9780849306846.
7. Порубов, А. В. Локализация нелинейных волн деформации / А. В. Порубов. – Москва : Физматлит, 2009. – 208 с. – ISBN 978-5-9221-1074-7. – Текст : непосредственный.

**EROFEEV<sup>1</sup> Vladimir Ivanovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, director; LENIN<sup>1</sup> Aleksey Olegovich, postgraduate student, PUPYNIN<sup>1</sup> Aleksandr Sergeevich, candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, TARASOV<sup>2</sup> Ivan Sergeevich, candidate of technical sciences, associate professor of the chair of lifting and transport machines and mechanical repair**

### ON THE RELATIONSHIP OF THE SPEED OF ELASTIC WAVES OF FUNDAMENTAL FREQUENCY AND HIGHER HARMONICS IN NONLINEAR ELASTIC RODS

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute of the RAS – Branch of “Federal Research Center A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences”  
85, Belinsky St., Nizhny Novgorod, Russia. Tel.: +7 (831) 432-03-00; e-mail: erof.vi@yandex.ru

<sup>2</sup>Volga State University of Water Transport  
5, Nesterov St., Nizhny Novgorod, Russia. Tel.: +7 (831) 218-44-13; e-mail: otd\_o@vsuwt.ru  
*Key words:* rod, nonlinearity, elastic wave, fundamental frequency, higher harmonics.

---

*The published work is devoted to the study of the ratio of the velocities of elastic waves of the fundamental frequency and higher harmonics, which make it possible to determine the degree of distortion of the shape of the probing acoustic signal propagating in a structural element.*

---

## REFERENCES

1. Artobolevsky I. I., Bobrovnitsky Yu. I., Genkin M. D. Vvedenie v akusticheskuyu dinamiku mashin [Introduction to acoustic dynamics of machines]. Moscow: Nauka. 1979. 296 p.



2. Grigolyuk E. I., Selezov I. T. Neklassicheskie teorii sterzhney, plastin i obolochek [Nonclassical theories of rods, plates and shells]. Moscow: VINITI, 1973. 272 p.
3. Vibratsii v tekhnike [Vibrations in technology] : Spravochnik v 6-ti tomakh. Tom 1. Kolebaniya lineynykh system [Vol. 1. Oscillations of non-linear systems] / pod red. V. V. Bolotina. 2-e izd., ispr. i dop. Moscow: Mashinostroenie. 1999. 504 p.
4. Erofeev V. I., Kazhaev V. V., Semerikova N. P. Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow: Fizmatlit, 2002. 208 p.
5. Erofeev V. I., Potapov A. I. Nelineynye modeli prodolnykh kolebaniy sterzhney [Nonlinear models of longitudinal vibrations of rods] // Gidraeromekhanika i teoriya uprugosti [Hydroaeromechanics and theory of elasticity] / Vsesoyuzny mezhvuzovskiy sbornik. Dnepropetrovsk. gos. un-t im. 300-letiya Vossoedineniya Ukrainy s Rossiey. Dnepropetrovsk, 1984. Issue 32. P. 78–82.
6. Samsonov A. M. Strain solitons in solids and how to construct them. Chapman & Hall / CRC. 2001. 230 p. – ISBN 9780849306846.
7. Porubov A. V. Lokalizatsiya nelineynykh voln deformatsii [Localization of nonlinear deformation waves]. Moscow: Fizmatlit, 2009. 208 p. – ISBN 978-5-9221-1074-7.

© В. И. Ерофеев, А. О. Ленин, А. С. Пупынин, И. С. Тарасов, 2023

Получено: 08.10.2023