



УДК 533.6

С. С. ШИЛОВ, соискатель ученой степени кандидата технических наук кафедры теории сооружений и технической механики¹, инженер-конструктор²; **П. А. ХАЗОВ**¹, д-р техн. наук, доц., проф. кафедры теории сооружений и технической механики; **М. С. КАЛИНИНА**¹, студент; **В. А. ПЬЯНКОВА**¹, студент

ПРИМЕНЕНИЕ ИНДИКАТРИСЫ ДЮПЕНА ПРИ РАСЧЕТЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СЕДЛОВИДНЫХ ПОКРЫТИЙ

¹ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет».

Россия, 603952, г. Н. Новгород, ул. Ильинская, д. 65.

Тел.: (951) 919-09-19; эл. почта: khazov.nngasu@mail.ru

Тел.: (961) 631-06-81; эл. почта: sergey.shilov.1997@mail.ru

²ООО «Строй-снаб».

Россия, 603000, г. Н. Новгород, ул. Нестерова, д. 33, офис 13.

Ключевые слова: седловидные покрытия, аэродинамические характеристики, построение опорного эллипса.

В статье представлены результаты исследования аэродинамических сил, действующих на седловидные покрытия. По результатам компьютерного моделирования, физического эксперимента и математического анализа был определен геометрический алгоритм. Результаты исследования приводятся в виде сводных таблиц, изополей аэродинамических давлений на поверхности сооружения и схем построения опорного эллипса с помощью индикатрисы Дюпена.

Введение

Расчет аэродинамических характеристик является неотъемлемым этапом при проектировании зданий и сооружений. На сегодняшний день существует ряд подходов к определению характера взаимодействия воздушных потоков с поверхностью объектов [1]. В действующем своде правил и нормативной документации [2] представлено определенное количество геометрических примитивов, для которых разработаны инженерные алгоритмы расчета аэродинамических коэффициентов. Данный подход является менее точным, чем непосредственно моделирование с помощью аэродинамической трубы или программного комплекса, но при этом остается востребованным благодаря своей доступности и оперативности, которые дают возможность определить распределение аэродинамических параметров.

В последнее время все большее распространение, преимущественно среди спортивно-зрелищных сооружений, получают конструкции с формой отрицательной гауссовой кривизны, представляющей собой седловидную поверхность. Однако нормативной методики для определения аэродинамических коэффициентов для таких поверхностей не существует, что вынуждает каждый раз обращаться к дорогостоящему физическому или к трудоемкому компьютерному моделированию. В статье [3] разработан способ по определению

аэродинамических параметров поверхностей такого плана, основанный на обработке результатов многочисленных экспериментальных исследований. Тем не менее, существенным недостатком данной методики является громоздкость и иногда отсутствие интуитивного понимания при формировании опорных эллипсов, на которых впоследствии строятся изополя ветровой нагрузки. В данной статье предлагается геометрический подход, основанный на применении индикатрисы Дюпена, который позволяет выполнить построение опорных эллипсов, не прибегая к их алгебраическому описанию.

Материалы и методы

Объектом исследования являются поверхности с отрицательной гауссовой кривизной, которая обладает комплексом характерных признаков. Она образована путем взаимно перпендикулярного скольжения двух кривизн, одна из которых является направляющей траектории, другая – элементом сдвига. При этом кривизны должны быть разных направлений – выпуклой и вогнутой.

Седловидные покрытия обеспечивают гибкость, устойчивость к деформационным воздействиям и не нуждаются в специальных стабилизирующих конструкциях. Благодаря комплексу конструктивных, функциональных и эстетических преимуществ, поверхности с отрицательной гауссовой кривизной находят широкое применение в строительстве [4].

По результатам аэродинамического моделирования [5–9], был проведен анализ изополей распределения характеристик ветрового потока, позволивший выявить устойчивую геометрическую закономерность: наличие опорного эллипса, от которого впоследствии могут быть отложены интерполяционные эллипсы с постоянным шагом. Таким образом, задача построения изополей аэродинамических характеристик носит геометрический характер и фактически сводится к корректному определению базового эллипса, что существенно упрощает расчет ветровых нагрузок на основе полученных данных [10].

Для связи кривизны поверхности седловидного покрытия и базового эллипса изополей предлагается применить индикатрису Дюпена, наглядно демонстрирующую дифференциально-геометрические характеристики поверхности в каждой точке. Для построения индикатрисы кривизны необходимо расщепить седловидное покрытие касательной плоскостью в характерной точке, в которой будет максимальное ветровое давление (шаг 1, рис. 1).

Индикатриса Дюпена седловидного покрытия состоит из двух взаимно перпендикулярных гипербол. В силу геометрической особенности рассматриваемой поверхности, данные гиперболы взаимно симметричны: действительная полуось первой гиперболы равна мнимой полуоси второй, и наоборот.

Для построения указанных гипербол требуется рассчитать длины отрезков в направлении угловой координаты φ . Данная координата задает положение секущей плоскости относительно главных направлений кривизны.

Длины отрезков гипербол рассчитывают по формуле на основе зависимости от радиуса кривизны (1). Сам же радиус кривизны определяется графическим методом посредством вырезания единичного объема под углом φ (шаг 2, рис. 1).

$$\frac{1}{\sqrt{k_u}} = \sqrt{R_u}. \quad (1)$$

Для построения индикатрисы Дюпена найденные отрезки откладывают от исходной гиперболической точки (шаг 3, рис. 1).



В качестве примера была взята форма с параметрами: $h_1 = 2,0$ м, $h_3 = 5,0$ м, $D = 50,0$ м, $H = 15,0$ м. Значения индикатрисы кривизны сведены в таблицу.

Таблица

К построению индикатрисы кривизны

φ	R_u , м	k_u	Индикатриса кривизны	Примечание
0,0	65,0	0,015385	8062,2577	$= a_1 = b_2$
10,0	70,144	0,014256	8375,2015	
20,0	91,662	0,01091	9574,0274	
30,0	179,58	0,005569	13400,746	
35,0	430,442	0,002323	20747,096	
40,0	861,371	0,001161	29349,123	
50,0	121,102	0,008258	11004,635	
60,0	68,485	0,014602	8275,5664	
70,0	51,586	0,019385	7182,3395	
80,0	44,906	0,022269	6701,1939	
90,0	43,063	0,023222	6562,2405	$= b_1 = a_2$

Наложение опорного эллипса, полученного в результате моделирования изополей, на построенную индикатрису кривизны для данной поверхности показало, что большая полуось опорного эллипса опирается на фокус первой гиперболы ($A = c$), а в другом направлении малая полуось равна половине расстояния до вершины второй гиперболы ($B = \frac{a_2}{2}$).

Данная закономерность позволяет найти опорный эллипс геометрическим способом, не обращаясь к аэродинамическому моделированию (шаг 4, рис. 1). Для этого рассчитываем фокусное расстояние c для первой гиперболы по формуле (2) через ее полуоси a_1 и b_1 .

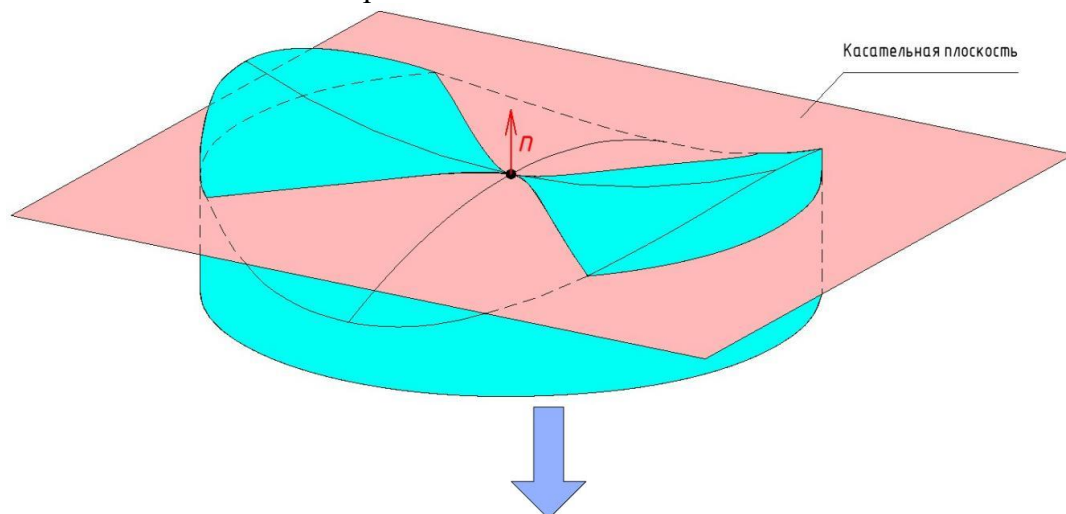
$$c = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}. \quad (2)$$

На заключительном этапе строятся интерполяционные эллипсы с заданным постоянным шагом (шаг 5, рис. 1). В направлении движения воздушных масс величина данного шага составляет $0,5d$, а в перпендикулярном ему – d . Численное значение базового параметра d выбирается исходя из требуемой точности детализации изополей ветровых нагрузок: чем меньше шаг, тем выше точность отображения градиента давлений.

Результаты исследования

После анализа полученных геометрических построений, появилась возможность определения аэродинамических характеристик седловидного покрытия – аэродинамических коэффициентов в конкретной точке по заданным координатам. На основании полученных изополей распределения давлений (рис. 2) определяются изополя распределения аэродинамических коэффициентов, которые численно равны отношению давления в исследуемой точке к давлению в невозмущенном потоке. Затем, следуя определенному алгоритму, можно найти необходимые значения в любой точке поверхности.

Шаг 1. Построение касательной плоскости в точке



Шаг 2. Определение радиуса кривизны графическим способом

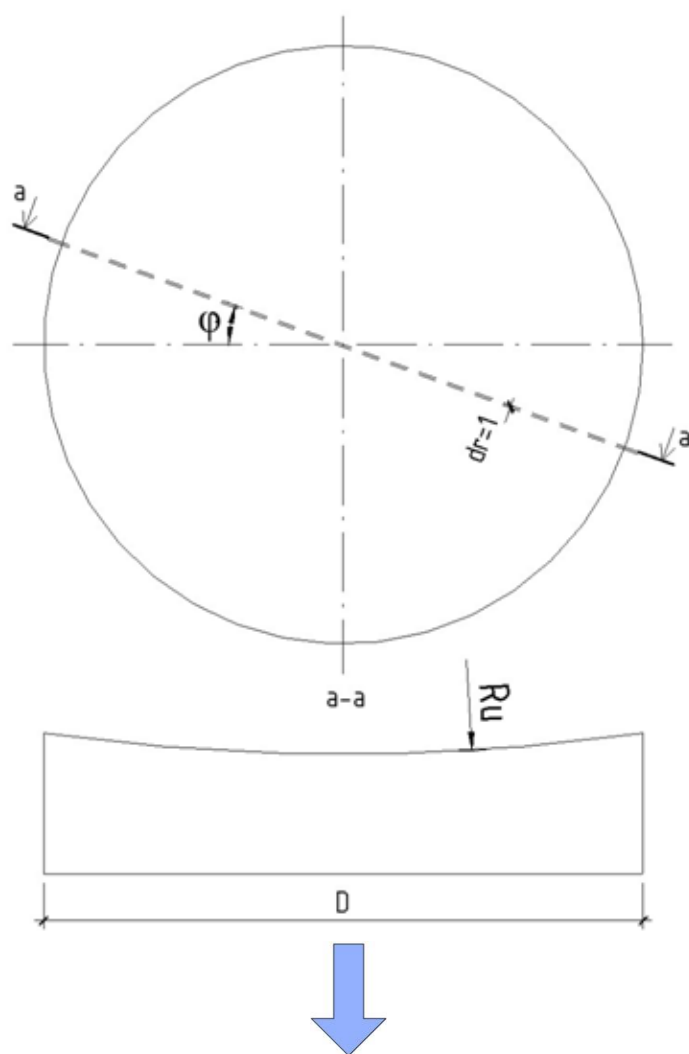
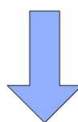
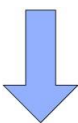
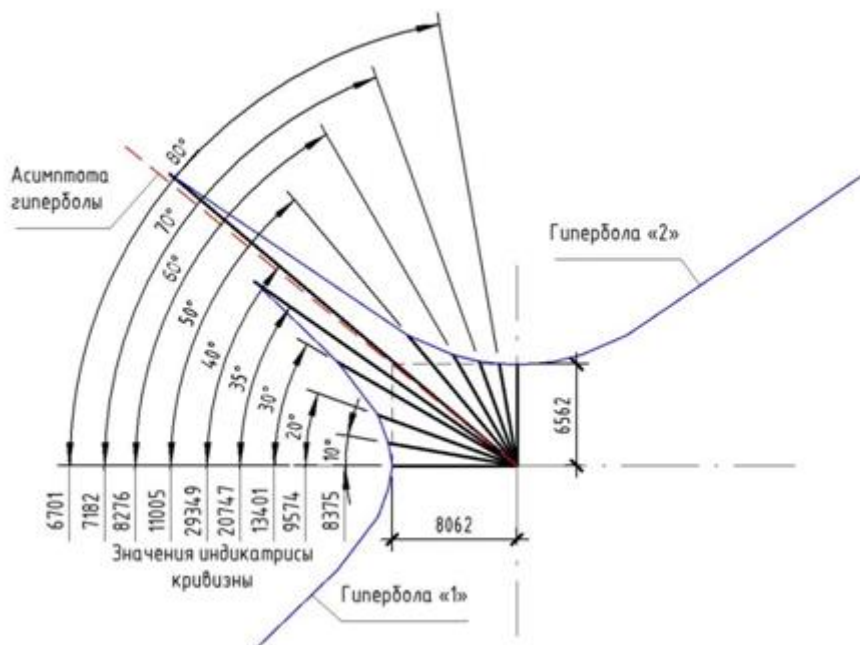


Рис. 1 (начало). Алгоритм геометрического построения изополей аэродинамических характеристик



Шаг 3. Построение индикатрисы кривизны



Шаг 4. Построение опорного эллипса

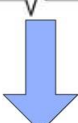
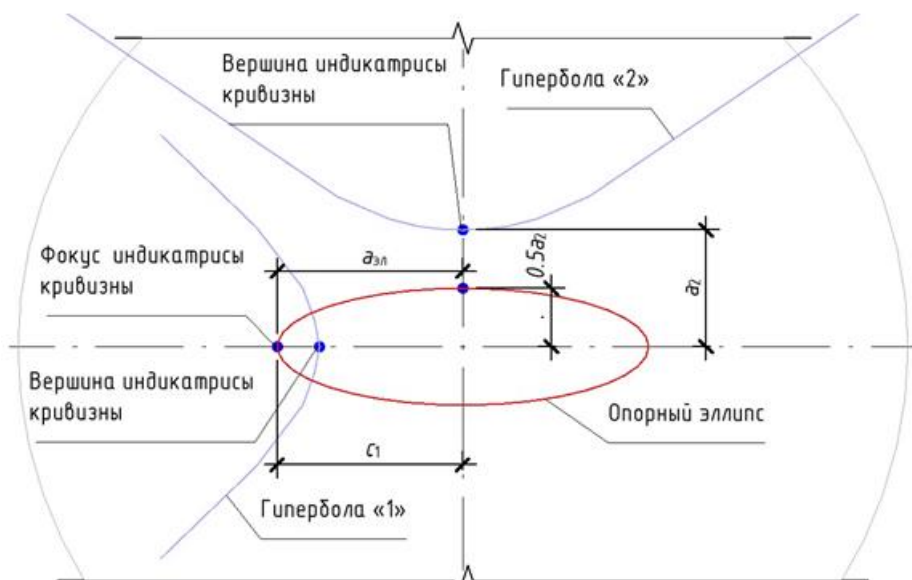


Рис. 1 (продолжение). Алгоритм геометрического построения изополей аэродинамических характеристик



Рис. 1 (окончание). Алгоритм геометрического построения изополей аэродинамических характеристик

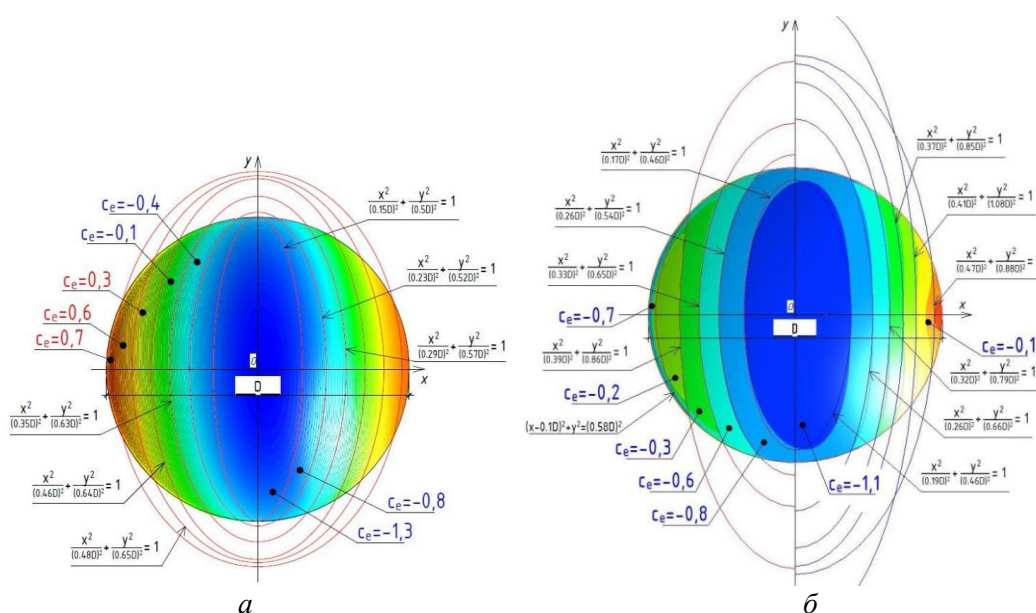


Рис. 2. Картина распределения давлений при направлении ветра параллельно дуге-образующей и соблюдении условий: а – $h_2/D < 0,1$ и $h_3/D > 0,15$; б – $h_2/D < 0,1$ и $h_3/D \leq 0,15$

При геометрическом анализе было определено, что основные формы аэродинамических зон представлены фрагментами эллипсов и окружностей, поэтому для каждого эллипса необходимо определить значение эксцентриситета. Далее, зная координаты точки, находится расстояние dA от центра координат до искомой точки и значение угла ϕA , образованного вертикальной осью координат

и отрезком dA . Уже имея некоторые данные, определяется значение радиуса эллипса или окружности при угле $ri(\varphi A)$.

В заключении проводится сравнение радиуса $ri(\varphi A)$ и отрезка dA , если $dA \leq ri(\varphi A)$, то точка внутри эллипса или окружности, следовательно, значение аэродинамического коэффициента в искомой точке будет аналогично зоне, в которой она находится. В противном случае следует провести проверку на принадлежность другим зонам.

На рис. 3 показан алгоритм в геометрическом представлении.

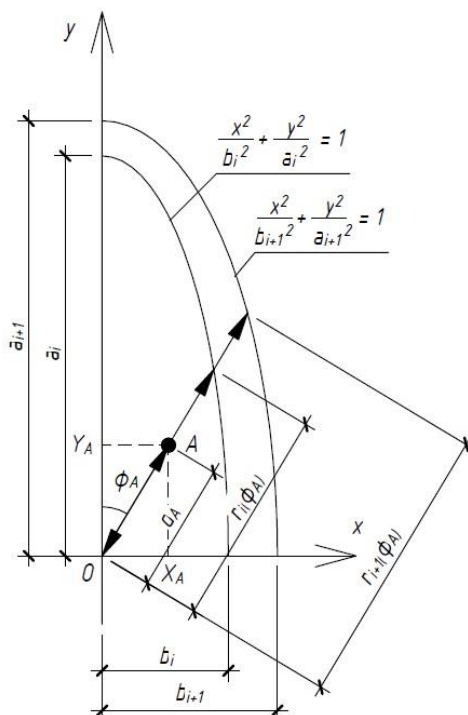


Рис. 3. Геометрическое представление предлагаемого алгоритма

Заключение

При проектировании конструкций седловидной формы могут возникнуть трудности при определении характера взаимодействия воздушных потоков с поверхностью объекта. Благодаря моделированию с помощью аэродинамической трубы или программного комплекса можно определить все необходимые аэродинамические характеристики, но это будет очень затратно и сложно, особенно при работе с поверхностями сложной геометрической структуры.

В ходе проведения исследования был найден более рациональный подход, позволяющий рассчитать аэродинамические коэффициенты, сократив при этом временные затраты и вычислительные ресурсы. Геометрический алгоритм, основанный на анализе индикатрисы Дюпена, является наиболее эффективным для поверхностей с отрицательной гауссовой кривизной. Несмотря на то, что алгоритм уступает компьютерным визуализациям и испытаниям в точности, он является весьма эффективным. Также стоит отметить, что разработанный алгоритм по своему стилистическому оформлению не противоречит действующим нормативам, что обосновывает целесообразность его включения в нормативную базу.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Паддаева, О. И. Архитектурно-строительная аэродинамика / О. И. Паддаева, И. В. Дуничкин // Вестник МГСУ. – 2017. – Т. 12, № 6. – С. 602–609.
2. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия : свод правил : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 3 декабря 2016 г. № 891/пр : актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85* : дата введения 4 июня 2017 г. – URL: <https://docs.cntd.ru/document/456044318> (дата обращения: 17.08.2026). – Текст : электронный.
3. Шилов, С. С. Методика цифровой поддержки определения аэродинамических показателей на поверхности двоякой кривизны / С. С. Шилов, П. А. Хазов, О. И. Ведяйкина // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2025. – № 7. – С. 23–31.
4. Агеева, Е. Ю. Конструктивные особенности висячих покрытий в общественных зданиях : учебное пособие для вузов / Е. Ю. Агеева, В. А. Тишков, А. Е. Филимонова ; Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород : ННГАСУ, 2015. – 87 с. – ISBN 978-5-528-00037-4.
5. Шилов, С. С. Численное моделирование аэродинамики поверхностей двоякой кривизны различных геометрических параметров / С. С. Шилов // Приволжский научный журнал / Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород, 2023. – № 1 (65). – С. 81–88.
6. Исследование обтекания воздушными потоками большепролетной поверхности численным и экспериментальным методами / А. М. Анущенко, В. И. Ерофеев, П. А. Хазов, А. А. Сатанов, А. В. Февральских // Приволжский научный журнал / Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород, 2021. – № 1. – С. 9–18.
7. Лампси, Б. Б. Численное и физическое моделирование ветровых потоков на большепролетное покрытие / Б. Б. Лампси, С. С. Шилов, П. А. Хазов // Вестник МГСУ. – 2022. – № 1. – С. 21–31.
8. Шилов, С. С. Алгоритмы автоматизации определения аэродинамических показателей поверхностей отрицательной гауссовой кривизны / С. С. Шилов // ГрафиКон 2025: материалы 35-й Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению. – Йошкар-Ола, 2025 – С. 1030–1039. – DOI 10.25686/978-5-8158-2474-4-2025-1030-1039.
9. Моделирование кривых 2-го порядка и поверхностей оболочек инженерных сооружений на их основе / Е. В. Конопацкий, О. С. Воронова, С. И. Ротков, М. В. Лагунова, А. А. Бездитный // Строительство и техногенная безопасность. – 2021. – № 22 (74). – С. 101–110.
10. Шилов, С. С. Геометрическая оптимизация седловидных поверхностей в задачах цифровой поддержки жизненного цикла технических систем / С. С. Шилов. – Текст : электронный // Приволжский научный журнал / Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород, 2026. – № 1. – С. 308–316. – URL: <https://pnj.nngasu.ru/word/articles/1-2026/32.pdf>.

SHILOV Sergey Sergeevich, applicant for candidate of technical sciences of the chair of structural theory and technical mechanics¹, design engineer²; KHAZOV Pavel Alekseevich¹, doctor of technical sciences, associate professor of the chair of structural theory and technical mechanics; KALININA Marina Sergeevna¹, student; PYANKOVA Valeria Aleksandrovna¹, student

APPLICATION OF THE DUPIN INDICATRIX IN CALCULATING THE AERODYNAMIC COEFFICIENTS OF SADDLE-SHAPED SURFACES



¹Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering.

65, Iljinskaya St., Nizhny Novgorod, 603952, Russia.

Tel.: (951) 919-09-19; e-mail: khazov.nngasu@mail.ru

Tel.: (961) 631-06-81; e-mail: sergey.shilov.1997@mail.ru

²Sroy-snab LLC.

33, Nesterova St., office 13, Nizhny Novgorod, 603000, Russia.

Key words: saddle shaped structures, aerodynamic characteristics, construction of the reference ellipse.

The article presents the results of a study of the aerodynamic forces acting on saddle-shaped surfaces. Based on the results of computer modeling, a physical experiment, and mathematical analysis, a geometric algorithm was determined. The results of the study are presented in the form of summary tables, isofields of aerodynamic pressure on the surface of the structure, and schemes for constructing the reference ellipse using the Dupin indicatrix.

REFERENCES

1. Paddaeva O. I., Dunichkin I. V. Arkhitekturno-stroitel'naya aerodinamika [Architectural and construction aerodynamics]. Vestnik MGSU [MGSU Bulletin]. 2017, Vol. 12, № 6, P. 602–609.

2. SP 20.13330.2016. Nagruzki i vozdeystviya [Loads and actions] : svod pravil : utverzhden prikazom Ministerstva stroitel'stva i zhilishchno-kommunal'nogo khozyaystva Rossiyskoy Federatsii ot 3 dekabrya 2016 g. № 891/pr : aktualizirovannaya redaktsiya SNiP 2.01.07-85* : data vvedeniya 4 iyunya 2017 g. URL: <https://docs.cntd.ru/document/456044318> (accessed: 17.08.2026).

3. Shilov S. S., Khazov P. A., Vedyaykina O. I. Metodika tsifrovoy podderzhki opredeleniya aerodinamicheskikh pokazateley na poverkhnosti dvoyakoy krivizny [Methodology of digital support for determining aerodynamic indicators on a double-curvature surface]. Vestnik kompyuternykh i informatsionnykh tekhnologiy [Bulletin of Computer and Information Technologies]. 2025, № 7, P. 23–31.

4. Ageeva E. Yu., Tishkov V. A., Filimonova A. E. Konstruktivnye osobennosti visyachikh pokrytiy v obshchestvennykh zdaniyakh [Structural features of suspended roofs in public buildings] : uchebnoe posobie dlya vuzov. Nizhegorodskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitel'nyy universitet. Nizhny Novgorod, NNGASU, 2015, 87 p. ISBN 978-5-528-00037-4.

5. Shilov S. S. Chislennoe modelirovanie aerodinamiki poverkhnostey dvoyakoy krivizny razlichnykh geometricheskikh parametrov [Numerical modeling of aerodynamics of double-curvature surfaces with various geometric parameters]. Privolzhskiy nauchnyy zhurnal [Privolzhsky Scientific Journal]. 2023, № 1 (65), P. 81–88.

6. Anushchenko A. M., Erofeev V. I., Khazov P. A., Satanov A. A., Fevralskikh A. V. Issledovanie obtekaniya vozdushnymi potokami bolsheproletnoy poverkhnosti chislennym i eksperimental'nym metodami [Study of airflow around a large-span surface by numerical and experimental methods]. Privolzhskiy nauchnyy zhurnal [Privolzhsky Scientific Journal]. Nizhegorodskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitel'nyy universitet. Nizhny Novgorod, 2021, № 1, P. 9–18.

7. Lamps B. B., Shilov S. S., Khazov P. A. Chislennoe i fizicheskoe modelirovanie vetrovykh potokov na bolsheproletnoye pokrytie [Numerical and physical modeling of wind flows on a large-span roof]. Vestnik MGSU [MGSU Bulletin]. 2022, № 1, P. 21–31.

8. Shilov S. S. Algoritmy avtomatizatsii opredeleniya aerodinamicheskikh pokazateley poverkhnostey otritsatel'noy gaussovoy krivizny [Algorithms for automating the determination of aerodynamic indicators of surfaces of negative Gaussian curvature]. Grafikon 2025:



Materialy 35-y Mezhdunarodnoy konferentsii po kompyuternoy grafike i mashinnomu zreniyu. Yoshkar-Ola, 2025, P. 1030–1039. DOI 10.25686/978-5-8158-2474-4-2025-1030-1039.

9. Konopatskiy E. V., Voronova O. S., Rotkov S. I., Lagunova M. V., Bezdity A. A. Modelirovanie krivyykh 2-go poryadka i poverkhnostey obolochek inzhenernykh sooruzheniy na ikh osnove [Modeling of second-order curves and shell surfaces of engineering structures based on them]. Stroitelstvo i tekhnogennaya bezopasnost [Construction and Technogenic Safety]. 2021, № 22 (74), P. 101–110.

10. Shilov S. S. Geometricheskaya optimizatsiya sedlovidnykh poverkhnostey v zadachakh tsifrovoy podderzhki zhiznennogo tsikla tekhnicheskikh sistem [Geometric optimization of saddle-shaped surfaces in problems of digital support of the life cycle of technical systems]. Privolzhskiy nauchny zhurnal [Privolzhsky Scientific Journal]. 2026, № 1, P. 308–316. URL: <https://pnj.nngasu.ru/word/articles/1-2026/32.pdf>.

© С. С. Шилов, П. А. Хазов, М. С. Калинина, В. А. Пьянкова, 2026

Получено: 03.08.2026 г.