



УДК 539.3/.6

С. В. БАКУШЕВ, д-р техн. наук, проф. кафедры механики

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ ПУЧКА РАЗНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ. ЧАСТЬ II

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства».

Россия, 440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, д. 28.

Тел./факс: (8412) 49-72-77, эл. почта: office@pguas.ru

Ключевые слова: стойка, неоднородность, упругость, внецентренное сжатие.

Рассматривается внецентренное сжатие упругой стойки, состоящей из пучка разнородных, не связанных друг с другом, но работающих совместно, стержней прямоугольного поперечного сечения. Стойка сжимается сосредоточенно полосовой нагрузкой. Внутренние силы в каждом стержне стойки определяются из условия, что в одном стержне нормальное напряжение в наиболее нагруженных волокнах достигает величины расчетного сопротивления материала стержня. Результаты данного исследования могут найти применение при проектировании и расчете внецентренно сжатых упругих стоек, состоящих из пучка не связанных между собой, но работающих совместно, стержней с прямоугольным поперечным сечением.

Введение

При усилении стоек, испытывающих как осевое сжатие, так и внецентренное сжатие, довольно часто используется прием, когда вплотную к усиливаемой стойке ставится одна или больше дополнительных стоек – стержней. В итоге в качестве стойки получаем пучок стержней, практически не связанных друг с другом, но работающих совместно. При этом необходимо обеспечить равное или близкое напряженное состояние усиливаемой стойки и дополнительных стержней. Вопросы расчета такого рода конструкций – стоек, находящихся в условиях внецентренного сжатия, рассматривались во многих работах отечественных и зарубежных исследователей. В статье [1] рассматривается внецентренное сжатие массивного неоднородного многослойного стержня с поперечным сечением, симметричным относительно одной из главных центральных осей инерции сечения. В монографии [2] рассматриваются научные и экспериментальные разработки по созданию алгоритма расчета сталебетонных стержней прямоугольного поперечного сечения с составной обоймой на центральное и внецентренное сжатие, в том числе с учетом продольного изгиба. В работе [3] анализируются способы усиления железобетонных колонн при разных уровнях нагружения с учетом особенностей эксплуатации, вида дефектов, подъемно-транспортных услуг, стоимости работ по усилению в зависимости от технологии выполнения работ, сроков проведения реконструкции и так далее. В статьях [4–6] рассматривается усиление каменной кладки односторонними аппликациями из торкрет-бетона. В работе [7] оценивается напряженно-деформированное состояние стойки в пенобетонной обойме при центральном и внецентренном сжатии.

В данной работе рассматривается внецентренное сжатие многослойной неоднородной упругой стойки, состоящей из совокупности (пучка) стержней, не



связанных друг с другом, но работающих совместно, находящейся в условиях внецентренного сжатия.

Постановка задачи

Рассмотрим пучок разнородных стержней, образующих стойку, находящуюся в условиях внецентренного сжатия. Стержни не связаны друг с другом, но работают совместно. Нижний конец стойки упирается в горизонтальную жесткую недеформируемую платформу. Сжимающее усилие – сосредоточенная сила F , приложенная на оси симметрии X , передается на верхний конец стойки через недеформируемую жесткую пластину так, что пластина поворачивается, в результате чего верхний обреза стойки получает неравномерное вертикальное перемещение и стойка изгибается в отрицательном направлении оси X (рис. 1). Стержни, образующие стойку, могут иметь, вообще говоря, различные формы поперечного сечения. Мы будем рассматривать стержни с прямоугольным поперечным сечением. При этом стержни, образующие стойку, могут располагаться так, что их плоскость либо перпендикулярна оси X (рис. 1а), либо совпадает с направлением оси X (рис. 1б).

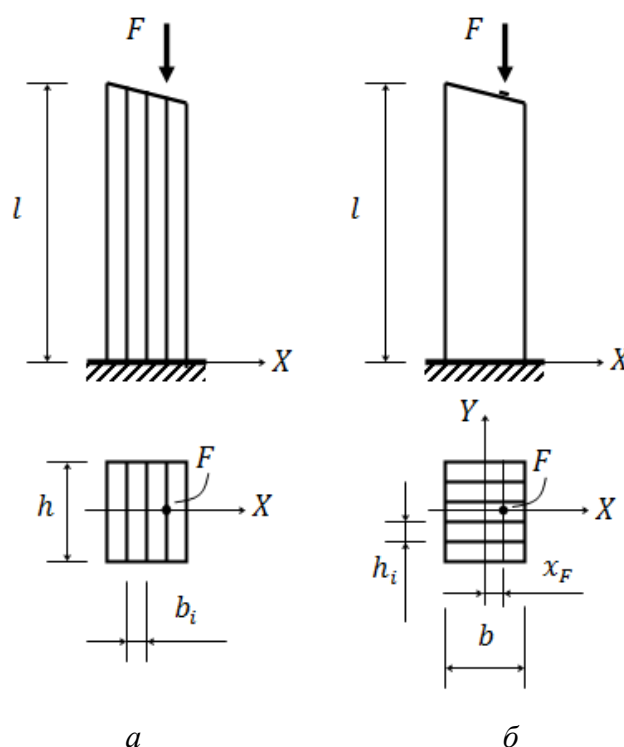


Рис. 1. Схема стойки

Первый случай, соответствующий рис. 1а, рассмотрен в работе [8]. Здесь будет рассматриваться случай, соответствующий рис. 1б (**Случай 2**). Однако внешняя нагрузка q на стойку будет передаваться на стойку через бесконечно жесткую недеформируемую балочку с исчезающе малой площадью поперечного сечения, расположенную перпендикулярно оси X на расстоянии x_F от оси Y (см. рис. 1б).

Приведем сосредоточенно-полосовую нагрузку q к сосредоточенной силе $F = q \cdot h$, которая будет приложена в точке с координатами $(0, x_F)$.

Случай 2 (рис. 1б). Эпюра перемещений верхнего конца стойки показана на рис. 2, откуда следует, что:

$$\begin{aligned}\Delta_{л1} &= \Delta_{л2} = \dots = \Delta_{лn}; \\ \Delta_{п1} &= \Delta_{п2} = \dots = \Delta_{пn}.\end{aligned}\quad (1)$$

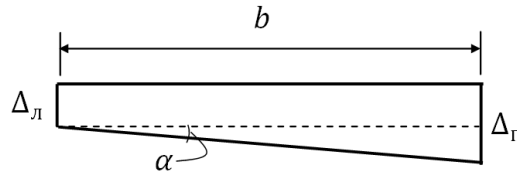


Рис. 2. Эпюра перемещений верхнего конца стойки

Разделив (1) на длину стойки l , получим систему уравнений совместности деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{л1} &= \varepsilon_{л2} = \dots = \varepsilon_{лn}; \\ \varepsilon_{п1} &= \varepsilon_{п2} = \dots = \varepsilon_{пn}.\end{aligned}\quad (2)$$

От действия сосредоточенной силы F в каждом стержне стойки возникнет продольная сила N_i . Следовательно,

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = F. \quad (3)$$

Каждый стержень стойки находится в условиях внецентренного сжатия от силы $F_i = N_i$. Можно предположить, судя по схеме деформирования стойки, что сила F_i приложена на расстоянии x_F от центра тяжести i -го стержня стойки. Тогда нормальное напряжение в каждом i -ом стержне на расстоянии x от его центра тяжести будет определяться соотношением:

$$\sigma_{z,i} = -\frac{F_i}{A_i} \mp \frac{F_i x_F}{I_{y,i}} x. \quad (4)$$

Здесь начало системы координат $X_i O Y$ располагается в центре тяжести поперечного сечения каждого стержня стойки (на пересечении диагоналей соответствующего прямоугольника), ось $O X_i$ направлена вправо; знак $+$ соответствует положительной полуоси X , знак $-$ соответствует отрицательной полуоси X . (Расстояние x берется по абсолютной величине).

Положение нейтральной линии в поперечном сечении каждого стержня найдем из условия, что на нейтральной линии $\sigma_{zi} = 0$, то есть отрезок, отсекаемый нейтральной линией на оси $O X_i$, будет равен:

$$a_{x,i} = -\frac{F_i}{A_i} \frac{I_{y,i}}{F_i x_F} = -\frac{I_{y,i}}{A_i x_F}. \quad (5)$$

Далее следует рассмотреть два возможных варианта.

1-й вариант. $|a_{x,i}| > \frac{1}{2}b$. Нейтральная линия располагается за пределами левого контура поперечного сечения i -го стержня стойки.

В этом случае максимальное нормальное напряжение в правых сжатых боковых волокнах каждого стержня стойки $\left(x = \left|\frac{b}{2}\right|\right)$ будет равно:

$$\sigma_{z,i}^{(п-)} = -\frac{F_i}{A_i} - \frac{F_i x_F}{I_{y,i}} \frac{b}{2}, \quad (6)$$

максимальное нормальное напряжение в левых сжатых боковых волокнах каждого стержня стойки $\left(x = \left|-\frac{b}{2}\right|\right)$ будет равно:

$$\sigma_{z,i}^{(л-)} = -\frac{F_i}{A_i} + \frac{F_i x_F}{I_{y,i}} \frac{b}{2}. \quad (7)$$



При этом $|\sigma_{z,i}^{(п-)}| > |\sigma_{z,i}^{(л-)}|$.

2-й вариант. $|a_{x,i}| \leq \frac{1}{2}b$. Нейтральная линия располагается в пределах контура поперечного сечения i -го стержня стойки.

В этом случае максимальное нормальное напряжение в правых сжатых боковых волокнах каждого стержня стойки $(x = \frac{b}{2})$ будет равно:

$$\sigma_{z,i}^{(п-)} = -\frac{F_i}{A_i} - \frac{F_i x_F b}{I_{y,i} 2}; \quad (8)$$

максимальное нормальное напряжение в левых растянутых боковых волокнах каждого стержня стойки $(x = -\frac{b}{2})$ будет равно:

$$\sigma_{z,i}^{(л+)} = -\frac{F_i}{A_i} + \frac{F_i x_F b}{I_{y,i} 2}. \quad (9)$$

Рассмотрим *первый* вариант.

Предположим, что максимальное нормальное напряжение в правых сжатых боковых волокнах конкретного k -го стержня достигает величины расчетного сопротивления на сжатие материала k -го стержня:

$$\sigma_{z,k}^{(п-)} = -\frac{F_k}{A_k} - \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k}} = -R_{k,\sigma}^{(-)}. \quad (10)$$

$$\text{Отсюда} \quad F_k = \frac{R_{k,\sigma}^{(-)}}{\frac{1}{A_k} + \frac{x_F b}{2I_{y,k}}}. \quad (11)$$

$$\text{При этом} \quad \varepsilon_{п,k} = \frac{R_{k,\sigma}^{(-)}}{E_k^{(-)}}. \quad (12)$$

Тогда максимальное нормальное напряжение в левых сжатых боковых волокнах k -го стержня будет равно:

$$\sigma_{z,k}^{(л-)} = -\frac{F_k}{A_k} + \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k}}. \quad (13)$$

$$\text{Следовательно,} \quad \varepsilon_{л,k} = \frac{\sigma_{z,k}^{(л-)}}{E_k^{(-)}} = -\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} + \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k} E_k^{(-)}}. \quad (14)$$

Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{л,k-1} &= \frac{\sigma_{z,k-1}^{(л-)}}{E_{k-1}^{(-)}} = -\frac{F_{k-1}}{A_{k-1} E_{k-1}^{(-)}} + \frac{F_{k-1} x_F b}{2I_{y,k-1} E_{k-1}^{(-)}}; \\ \varepsilon_{л,k-2} &= \frac{\sigma_{z,k-2}^{(л-)}}{E_{k-2}^{(-)}} = -\frac{F_{k-2}}{A_{k-2} E_{k-2}^{(-)}} + \frac{F_{k-2} x_F b}{2I_{y,k-2} E_{k-2}^{(-)}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{л,1} &= \frac{\sigma_{z,1}^{(л-)}}{E_1^{(-)}} = -\frac{F_1}{A_1 E_1^{(-)}} + \frac{F_1 x_F b}{2I_{y,1} E_1^{(-)}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{л,k+1} &= \frac{\sigma_{z,k+1}^{(л-)}}{E_{k+1}^{(-)}} = -\frac{F_{k+1}}{A_{k+1} E_{k+1}^{(-)}} + \frac{F_{k+1} x_F b}{2I_{y,k+1} E_{k+1}^{(-)}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{л,n} &= \frac{\sigma_{z,n}^{(л-)}}{E_n^{(-)}} = -\frac{F_n}{A_n E_n^{(-)}} + \frac{F_n x_F b}{2I_{y,n} E_n^{(-)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Принимая во внимание уравнения совместности деформаций (2), из соотношений (15) получаем:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} + \frac{F_k x_F b}{2 I_{y,k} E_k^{(-)}}}{-\frac{1}{A_1 E_1^{(-)}} + \frac{x_F b}{2 I_{y,1} E_1^{(-)}}}; \\ F_2 &= \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} + \frac{F_k x_F b}{2 I_{y,k} E_k^{(-)}}}{-\frac{1}{A_2 E_2^{(-)}} + \frac{x_F b}{2 I_{y,2} E_2^{(-)}}}; \\ &\dots\dots\dots \\ F_k &= \frac{R_{k,\sigma}^{(-)}}{\frac{1}{A_k} + \frac{x_F b}{2 I_{y,k}}}; \\ F_{k+1} &= \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} + \frac{F_k x_F b}{2 I_{y,k} E_k^{(-)}}}{-\frac{1}{A_{k+1} E_{k+1}^{(-)}} + \frac{x_F b}{2 I_{y,k+1} E_{k+1}^{(-)}}}; \\ &\dots\dots\dots \\ F_n &= \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} + \frac{F_k b^2}{4 I_{y,k} E_k^{(-)}}}{-\frac{1}{A_n E_n^{(-)}} + \frac{x_F b}{2 I_{y,n} E_n^{(-)}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Формулы (16) позволяют по формуле (3) определить ту действующую внешнюю силу F , при которой в правых сжатых боковых волокнах k -го стержня нормальное напряжение достигает величины расчетного сопротивления на сжатие материала k -го стержня при условии, что нейтральная линия в k -ом стержне проходит за пределами контура поперечного сечения стойки.

Рассмотрим *второй* вариант.

Пусть максимальное нормальное напряжение в правых сжатых боковых волокнах k -го стержня стойки достигает величины расчетного сопротивления на сжатие материала k -го стержня:

$$\sigma_{z,k}^{(п-)} = -\frac{F_k}{A_k} - \frac{F_k x_F b}{2 I_{y,k}} = -R_{k,\sigma}^{(-)}. \quad (17)$$

Отсюда
$$F_k = \frac{R_{k,\sigma}^{(-)}}{\frac{1}{A_k} + \frac{x_F b}{2 I_{y,k}}}. \quad (18)$$

При этом
$$\varepsilon_{п,k} = \frac{R_{k,\sigma}^{(-)}}{E_k^{(-)}}. \quad (19)$$

Тогда максимальное нормальное напряжение в левых растянутых боковых волокнах k -го стержня будет равно:

$$\sigma_{z,k}^{(л+)} = -\frac{F_k}{A_k} + \frac{F_k x_F b}{2 I_{y,k}}. \quad (20)$$

Следовательно,
$$\varepsilon_{л,k} = \frac{\sigma_{z,k}^{(л+)}}{E_k^{(+)}} = -\frac{F_k}{A_k E_k^{(+)}} + \frac{F_k x_F b}{2 I_{y,k} E_k^{(+)}}. \quad (21)$$

Кроме того, имеем:

$$\varepsilon_{л,k-1} = \frac{\sigma_{z,k-1}^{(л+)}}{E_{k-1}^{(+)}} = -\frac{F_{k-1}}{A_{k-1} E_{k-1}^{(+)}} + \frac{F_{k-1} x_F b}{2 I_{y,k-1} E_{k-1}^{(+)}};$$



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\text{л},k-2} &= \frac{\sigma_{z,k-2}^{(+)}}{E_{k-2}^{(+)}} = -\frac{F_{k-2}}{A_{k-2}E_{k-2}^{(+)}} + \frac{F_{k-2}x_F b}{2I_{y,k-2}E_{k-2}^{(+)}}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varepsilon_{\text{л},1} &= \frac{\sigma_{z,1}^{(+)}}{E_1^{(+)}} = -\frac{F_1}{A_1E_1^{(+)}} + \frac{F_1x_F b}{2I_{y,1}E_1^{(+)}}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varepsilon_{\text{л},k+1} &= \frac{\sigma_{z,k+1}^{(+)}}{E_{k+1}^{(+)}} = -\frac{F_{k+1}}{A_{k+1}E_{k+1}^{(+)}} + \frac{F_{k+1}x_F b}{2I_{y,k+1}E_{k+1}^{(+)}}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varepsilon_{\text{л},n} &= \frac{\sigma_{z,n}^{(+)}}{E_n^{(+)}} = -\frac{F_n}{A_nE_n^{(+)}} + \frac{F_nx_F b}{2I_{y,n}E_n^{(+)}}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Принимая во внимание уравнения совместности деформаций (2), из соотношений (22) получаем:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{-\frac{F_k}{A_kE_k^{(+)}} + \frac{F_kx_F b}{2I_{y,k}E_k^{(+)}}}{-\frac{F_1}{A_1E_1^{(+)}} + \frac{F_1x_F b}{2I_{y,1}E_1^{(+)}}}; \\
 F_2 &= \frac{-\frac{F_k}{A_kE_k^{(+)}} + \frac{F_kx_F b}{2I_{y,k}E_k^{(+)}}}{-\frac{1}{A_2E_2^{(+)}} + \frac{x_F b}{2I_{y,2}E_2^{(+)}}}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 F_k &= \frac{R_{k\sigma}^{(-)}}{\frac{1}{A_k} + \frac{x_F b}{2I_{y,k}}}; \\
 F_{k+1} &= \frac{-\frac{F_k}{A_kE_k^{(+)}} + \frac{F_kx_F b}{2I_{y,k}E_k^{(+)}}}{-\frac{1}{A_{k+1}E_{k+1}^{(+)}} + \frac{x_F b}{2I_{y,k+1}E_{k+1}^{(+)}}}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 F_n &= \frac{-\frac{F_k}{A_kE_k^{(+)}} + \frac{F_kx_F b}{2I_{y,k}E_k^{(+)}}}{-\frac{1}{A_nE_n^{(+)}} + \frac{x_F b}{2I_{y,n}E_n^{(+)}}}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Формулы (23) позволяют по формуле (3) определить ту действующую внешнюю силу F , при которой в правых сжатых боковых волокнах k -го стержня нормальное напряжение достигает величины расчетного сопротивления на сжатие материала k -го стержня при условии, что нейтральная линия в k -ом стержне проходит в пределах контура поперечного сечения стойки.

Пусть максимальное нормальное напряжение в левых растянутых боковых волокнах k -го стержня стойки достигает величины расчетного сопротивления на растяжение материала k -го стержня:

$$\sigma_{z,k}^{(+)} = -\frac{F_k}{A_k} + \frac{F_kx_F b}{2I_{y,k}} = R_{k,\sigma}^{(+)} \tag{24}$$

$$\text{Отсюда} \quad F_k = \frac{R_{k,\sigma}^{(+)}}{-\frac{1}{A_k} + \frac{x_F b}{2I_{y,k}}} \tag{25}$$



При этом
$$\varepsilon_{l,k} = \frac{R_{k,\sigma}^{(+)}}{E_k^{(+)}}. \quad (26)$$

Тогда максимальное нормальное напряжение в правых сжатых боковых волокнах k -го стержня будет равно:

$$\sigma_{z,k}^{(п-)} = -\frac{F_k}{A_k} - \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k}}. \quad (27)$$

Следовательно,
$$\varepsilon_{п,k} = \frac{\sigma_{z,k}^{(п-)}}{E_k^{(-)}} = -\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} - \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k} E_k^{(-)}}. \quad (28)$$

Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{п,k-1} &= \frac{\sigma_{z,k-1}^{(п-)}}{E_{k-1}^{(-)}} = -\frac{F_{k-1}}{A_{k-1} E_{k-1}^{(-)}} - \frac{F_{k-1} x_F b}{2I_{y,k-1} E_{k-1}^{(-)}}, \\ \varepsilon_{п,k-2} &= \frac{\sigma_{z,k-2}^{(п-)}}{E_{k-2}^{(-)}} = -\frac{F_{k-2}}{A_{k-2} E_{k-2}^{(-)}} - \frac{F_{k-2} x_F b}{2I_{y,k-2} E_{k-2}^{(-)}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{п,1} &= \frac{\sigma_{z,1}^{(п-)}}{E_1^{(-)}} = -\frac{F_1}{A_1 E_1^{(-)}} - \frac{F_1 x_F b}{2I_{y,1} E_1^{(-)}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{п,k+1} &= \frac{\sigma_{z,k+1}^{(п-)}}{E_{k+1}^{(-)}} = -\frac{F_{k+1}}{A_{k+1} E_{k+1}^{(-)}} - \frac{F_{k+1} x_F b}{2I_{y,k+1} E_{k+1}^{(-)}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{п,n} &= \frac{\sigma_{z,n}^{(п-)}}{E_n^{(-)}} = -\frac{F_n}{A_n E_n^{(-)}} - \frac{F_n x_F b}{2I_{y,n} E_n^{(-)}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Принимая во внимание уравнения совместности деформаций (2), из соотношений (29) получаем:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} - \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k} E_k^{(-)}}}{\frac{1}{A_1 E_1^{(-)}} - \frac{x_F b}{2I_{y,1} E_1^{(-)}}}, \\ F_2 &= \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} - \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k} E_k^{(-)}}}{\frac{1}{A_2 E_2^{(-)}} - \frac{x_F b}{2I_{y,2} E_2^{(-)}}}, \\ &\dots\dots\dots \\ F_k &= \frac{R_{k,\sigma}^{(+)}}{-\frac{1}{A_k} + \frac{x_F b}{2I_{y,k}}}, \\ F_{k+1} &= \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} - \frac{F_k x_F b}{2I_{y,k} E_k^{(-)}}}{\frac{1}{A_{k+1} E_{k+1}^{(-)}} - \frac{x_F b}{2I_{y,k+1} E_{k+1}^{(-)}}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (30)$$



$$F_n = \frac{-\frac{F_k}{A_k E_k^{(-)}} - \frac{F_k x_F b}{2 I_{y,k} E_k^{(-)}}}{-\frac{1}{A_n E_n^{(-)}} - \frac{x_F b}{2 I_{y,n} E_n^{(-)}}}$$

Формулы (30) позволяют по формуле (3) определить ту действующую внешнюю силу F , при которой в левых растянутых боковых волокнах k -го стержня нормальное напряжение достигает величины расчетного сопротивления на растяжение материала k -го стержня при условии, что нейтральная линия в k -ом стержне проходит в пределах контура поперечного сечения стойки.

Зная действующую внешнюю сосредоточенную силу на каждый стержень стойки, можно оценить прочность каждого стержня, а следовательно, и прочность стойки.

Пример расчета

Рассмотрим в качестве примера внецентренно сжатую стойку длиной $l = 300$ см, состоящую из трех стержней сечением 51×15 см; 51×25 см; 51×15 см. Первый стержень выполнен из каменной кладки из гранита: $E_1 = 0,1 \cdot 10^5$ МПа; $R_1^{(-)} = -5$ МПа; $R_1^{(+)} = 0,075$ МПа, второй стержень выполнен из кирпичной кладки: $E_2 = 0,03 \cdot 10^5$ МПа; $R_2^{(-)} = -2$ МПа; $R_2^{(+)} = 0,2$ МПа, третий стержень выполнен из мраморной плиты: $E_3 = 0,56 \cdot 10^5$ МПа; $R_3^{(-)} = -175$ МПа; $R_3^{(+)} = 20$ МПа. Координаты точки приложения сжимающей силы F ($x_F = 8$ см; $y = 0$ см).

Вычисляем площади поперечных сечений стержней и моменты инерции:

$$\begin{aligned} A_1 &= 51 \times 15 = 765 \text{ см}^2; & I_{y,1} &= \frac{10 \cdot 51^3}{12} = 165813,75 \text{ см}^4; \\ A_2 &= 51 \times 25 = 1275 \text{ см}^2; & I_{y,2} &= \frac{25 \cdot 51^3}{12} = 276356,25 \text{ см}^4; \\ A_3 &= 51 \times 15 = 765 \text{ см}^2. & I_{y,3} &= \frac{5 \cdot 51^3}{12} = 165813,75 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Вычисляем положение нейтральной линии:

$$\begin{aligned} a_{x,1} &= -\frac{I_{y,1}}{A_1 x_F} = -27,09 \text{ см}; \\ a_{x,2} &= -\frac{I_{y,2}}{A_2 x_F} = -27,09 \text{ см}; \\ a_{x,3} &= -\frac{I_{y,3}}{A_3 x_F} = -27,09 \text{ см}. \end{aligned}$$

Следовательно, нейтральная линия проходит за пределами контура поперечного сечения стойки. Для определения действующей на стойку нагрузки F рассмотрим три случая. Расчетным будет считаться тот случай, где нормальное напряжение в фибровых волокнах каждого стержня не превосходит величину расчетного сопротивления его материала.

Случай 1. Пусть нормальное напряжение в правых сжатых волокнах первого стержня достигает величины расчетного сопротивления. Тогда по формулам (16) получаем:

$$F_1 = 197,05 \text{ кН}; F_2 = 98,52 \text{ кН}; F_3 = 1103,45 \text{ кН}.$$

Следовательно, $F = 1399,02$ кН.

Нормальные напряжения в фибровых волокнах будут равны:

$$\sigma_{z,1}^{(п-)} = R_1^{(-)} = -5 \text{ МПа}; \quad \sigma_{z,1}^{(л-)} = -\frac{F_1}{A_1} + \frac{F_1 x_F b}{2 I_{y,1}} = -0,15 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z,2}^{(п-)} &= -\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_2 x_F b}{2I_{y,2}} = -1,50 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,2}^{(л-)} &= -\frac{F_2}{A_2} + \frac{F_2 x_F b}{2I_{y,2}} = -0,05 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,3}^{(п-)} &= -\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_3 x_F b}{2I_{y,3}} = -28,00 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,3}^{(л-)} &= -\frac{F_3}{A_3} + \frac{F_3 x_F b}{2I_{y,3}} = -0,85 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Случай 2. Пусть нормальное напряжение в правых сжатых волокнах второго стержня достигает величины расчетного сопротивления. Тогда по формулам (16) получаем:

$$F_1 = 262,73 \text{ кН}; F_2 = 131,36 \text{ кН}; F_3 = 1471,27 \text{ кН.}$$

Следовательно, $F = 1865,36 \text{ кН}$.

Нормальные напряжения в фибровых волокнах будут равны:

$$\begin{aligned}\sigma_{z,1}^{(п-)} &= -\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_1 x_F b}{2I_{y,1}} = -6,67 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,1}^{(л-)} &= -\frac{F_1}{A_1} + \frac{F_1 x_F b}{2I_{y,1}} = -0,20 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,2}^{(п-)} &= R_2^{(-)} = -2 \text{ МПа;} \quad \sigma_{z,2}^{(л-)} = -\frac{F_2}{A_2} + \frac{F_2 x_F b}{2I_{y,2}} = -0,06 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,3}^{(п-)} &= -\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_3 x_F b}{2I_{y,3}} = -37,33 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,3}^{(л-)} &= -\frac{F_3}{A_3} + \frac{F_3 x_F b}{2I_{y,3}} = -1,13 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Случай 3. Пусть нормальное напряжение в правых сжатых волокнах третьего стержня достигает величины расчетного сопротивления. Тогда по формулам (16) получаем:

$$F_1 = -89409,37 \text{ кН}; F_2 = 615,77 \text{ кН}; F_3 = 6896,59 \text{ кН.}$$

Следовательно, $F = -81897,02 \text{ кН}$.

Нормальные напряжения в фибровых волокнах будут равны:

$$\begin{aligned}\sigma_{z,1}^{(п-)} &= -\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_1 x_F b}{2I_{y,1}} = 2268,75 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,1}^{(л-)} &= -\frac{F_1}{A_1} + \frac{F_1 x_F b}{2I_{y,1}} = 68,75 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,2}^{(п-)} &= -\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_2 x_F b}{2I_{y,2}} = -9,37 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,2}^{(л-)} &= -\frac{F_2}{A_2} + \frac{F_2 x_F b}{2I_{y,2}} = -0,28 \text{ МПа;} \\ \sigma_{z,3}^{(п-)} &= R_3^{(-)} = 175 \text{ МПа;} \quad \sigma_{z,3}^{(л-)} = -\frac{F_3}{A_3} + \frac{F_3 x_F b}{2I_{y,3}} = -5,30 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Анализ полученных результатов показывает, что, если действующая на стойку внешняя сила будет равна $F = 1399,02 \text{ кН}$, то есть нагрузка на каждый стержень будет равна $F_1 = 197,05 \text{ кН}$; $F_2 = 98,52 \text{ кН}$; $F_3 = 1103,45 \text{ кН}$, то нормальное напряжение в каждом стержне в крайних, фибровых волокнах не превосходит величины расчетного сопротивления его материала. Это и есть расчетный случай, *случай 1*.

Выводы

1. Определение усилий в каждом стержне пучка на связанных между собой, но работающих совместно, стержней внецентренно сжатой стойки выполняется на основе уравнений совместности деформаций.

2. Решение конкретной задачи строится путем последовательного перебора стержней стойки с предварительным заданием величины нормального



напряжения, равного расчетному сопротивлению материала стержня в наиболее напряженных волокнах.

Заключение

Результаты данного исследования могут найти применение при проектировании и расчете внецентренно сжатых упругих стоек, состоящих из пучка не связанных между собой, но работающих совместно, стержней с прямоугольным поперечным сечением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бакушев, С. В. Внецентренное сжатие массивного неоднородного стержня / С. В. Бакушев // Приволжский научный журнал / Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород, 2025. – № 2 (74). – С. 9–20.
2. Серых, И. Р. Напряженно-деформированное состояние сталебетонных брусьев прямоугольного поперечного сечения с составной обоймой при сжатии и изгибе: монография / И. Р. Серых, Е. В. Чернышева. – Белгород : Изд-во БГТУ, 2015. – 108 с.
3. Георгиев, С. В. К определению наиболее эффективного способа усиления железобетонных колонн при разных уровнях нагружения / С. В. Георгиев, Д. Р. Маилян, А. И. Соловьева // Современные тенденции в строительстве, градостроительстве и планировке территорий. – 2024. – Том 3, № 1. – С. 7–14. –DOI: 10.23947/2949-1835-2024-3-1-7-14.
4. Симаков, О. А. Проектирование усиления каменной кладки односторонними аппликациями из торкрет-бетона / О. А. Симаков, В. А. Нещадимов // Строительство и реконструкция. – 2024. – № 2 (112). – С. 39–49. DOI: 10.33979/2073-7416-2024-112-2-39-49.
5. Экспериментальные исследования сейсмоусиления каменной кладки наружными бетонными аппликациями / Г. П. Тонких, О. В. Кабанцев, О. А. Симаков, А. Б. Симаков, С. М. Баев, П. С. Панфилов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2011. – № 2. – С. 35–42.
6. Повышение сейсмостойкости каменных конструкций односторонними аппликациями из торкрет-бетона / О. В. Кабанцев, Г. П. Тонких, О. В. Кабанцев, [и др.] // Аэропорты. Прогрессивные технологии. – 2011. – № 2. – С. 26–32.
7. Савенков, А. И. Деформации внецентренно-сжатой стойки в пенобетонной обойме / А. И. Савенков, Е. О. Заенец, А. В. Кетнер // Сборник научных трудов Ангарского государственного технического университета. – 2021. – Том 1, № 18. – С. 130–133.
8. Бакушев, С. В. Внецентренное сжатие пучка разнородных стержней. Часть 1. / С. В. Бакушев, А. М. Максяшева. – Текст : электронный // Моделирование и механика конструкций. – 2026. – № 23. – URL: <http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no23-may-2026-g/stroitelnaya-mehanika>.

BAKUSHEV Sergey Vasilevich, doctor of technical sciences, professor of the chair of mechanics

OFF-CENTER COMPRESSION BUNDLE OF HETEROGENEOUS RODS. PART II

Penza State University of Architecture and Construction.

28, Germana Titova St., Penza, 440028, Russia.

Tel.: (8412) 49-72-77, e-mail: office@pguas.ru

Key words: strut, heterogeneity, elasticity, off-center center compression.

This paper considers the off-center compression of an elastic strut consisting of a bundle of heterogeneous, unconnected but working-together rods with a rectangular cross-section. The strut is compressed in a concentrated manner by the strip load. The internal forces in each rod of the strut are determined from the condition that in one rod the normal stress in the most loaded fibers reaches the value of the design resistance of the rod material. The results of this study can be used in the design and calculation of eccentrically compressed elastic struts consisting of a bundle of unconnected but working together, members with a rectangular cross-section.

REFERENCES

1. Bakushev S. V. Vnetsentrennoe szhatie massivnogo neodnorodnogo sterzhnya [Eccentric compression of a massive heterogeneous bar]. Privolzhskiy nauchny zhurnal [Privolzhsky Scientific Journal]. Nizhegorodskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitelnyy universitet. Nizhny Novgorod, 2025, № 2 (74), P. 9–20.
2. Serykh I. R., Chernysheva E. V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie stalebetonnykh brusev pryamougolnogo poperechnogo secheniya s sostavnoy oboymoy pri szhatii i izgibe: monografiya [Stress-strain state of steel-concrete beams of rectangular cross-section with a composite jacket under compression and bending: monograph]. Belgorod, Izd-vo BGTU, 2015, 108 p.
3. Georgiev S. V., Mayilyan D. R., Soloveva A. I. K opredeleniyu naibolee effektivnogo sposoba usileniya zhelezobetonnykh kolonn pri raznykh urovnyakh nagruzheniya [Towards determining the most effective method of strengthening reinforced concrete columns at different loading levels]. Sovremennye tendentsii v stroitelstve, gradostroitelstve i planirovke territoriy [Modern Trends in Construction, Urban Planning and Territorial Planning], 2024, Vol. 3, № 1, P. 7–14. DOI: 10.23947/2949-1835-2024-3-1-7-14.
4. Simakov O. A., Neshchadimov V. A. Proektirovanie usileniya kamennoy kladki odnostoronnnimi aplikatsiyami iz torkret-betona [Design of strengthening masonry with one-sided shotcrete applications]. Stroitelstvo i rekonstruktsiya [Construction and Reconstruction], 2024, № 2 (112), P. 39–49. DOI: 10.33979/2073-7416-2024-112-2-39-49.
5. Tonkikh G. P., Kabantsev O. V., Simakov O. A., Simakov A. B., Baev S. M., Panfilov P. S. Eksperimentalnye issledovaniya seysmoustoyeniya kamennoy kladki naruzhnymi betonnyymi aplikatsiyami [Experimental studies of seismic strengthening of masonry with external concrete applications]. Seysmostoykoe stroitelstvo. Bezopasnost sooruzheniy [Seismic-resistant Construction. Safety of Structures], 2011, № 2, P. 35–42.
6. Kabantsev O. V., Tonkikh G. P., [et al.] Povyshenie seysmostoykosti kamennykh konstruksiy odnostoronnnimi aplikatsiyami iz torkret-betona [Increasing the seismic resistance of masonry structures with one-sided shotcrete applications]. Aeroporty. Progressivnye tekhnologii [Airports. Progressive Technologies], 2011, № 2, P. 26–32.
7. Savenkov A. I., Zaenets E. O., Ketner A. V. Deformatsii vnetsentrenno-szhatoy stoyki v penobetonnoy oboyme [Deformations of an eccentrically compressed strut in a foam concrete jacket]. Sbornik nauchnykh trudov Angarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Collection of Scientific Papers of the Angarsk State Technical University], 2021, Vol. 1, № 18, P. 130–133.
8. Bakushev S. V., Maksyasheva A. M. Vnetsentrennoe szhatie puchka raznorodnykh sterzhney [Eccentric compression of a bundle of dissimilar bars]. Chast 1. Modelirovanie i mekhanika konstruksiy [Modeling and Mechanics of Structures], 2026, № 23. URL: <http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no23-may-2026-g/stroitel'naya-mekhanika>.

© С. В. Бакушев, 2026

Получено: 07.06.2026 г.