



УДК 534.1

В. И. ЕРОФЕЕВ, д-р физ.-мат. наук, проф., директор; **Е. Е. ЛИСЕНКОВА**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник

ДВИЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА ПО ОДНОМЕРНОЙ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова – Грехова Российской академии наук»

Россия, 603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, д. 85. Тел.: (831) 432-03-00; эл. почта: erof.vi@yandex.ru, eelissen@yandex.ru

Ключевые слова: упругая одномерная система, движущийся распределенный объект, давление волн, сила сопротивления движению.

Рассматривается динамическое поведение деформируемой системы, состоящей из одномерной упругой направляющей (подсистема 1) и безотрывно движущегося по ней одномерного распределенного объекта (подсистема 2). Приводится постановка самосогласованной краевой задачи, корректно учитывающая силы взаимодействия в области сопряжения подсистем. В случае равномерного движения распределенного объекта постоянной плотности найдено точное аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях. Получено выражение для силы, обусловленной давлением волн (силы сопротивления движению). Исследуется зависимость постоянной составляющей этой силы от скорости движения объекта и частоты внешнего воздействия. Установлена возможность снижения сопротивления движению распределенного объекта при вибрационном воздействии за счет излучения волн в направляющую.

Введение

Многие элементы строительных и машиностроительных конструкций и сооружений в процессе их эксплуатации находятся в условиях подвижного контактного сопряжения [1–5]. В качестве примера можно привести сопряжения типа «колесо – рельсовая направляющая» либо «колесо – дорожное покрытие», которые широко применяются в транспортных системах и технологических линиях. С позиции надежности проектируемых конструкций определяющим является динамическое воздействие движущегося объекта на упругую направляющую, оказывающее существенное влияние на ее поведение. В то же время динамика самого объекта под действием приложенных к нему сил и сил реакции со стороны направляющей также представляет значительный интерес с точки зрения эффективности и работоспособности конструкции. Примерами могут служить различные виды разгонно-тормозных устройств, с помощью которых обеспечивают заданные характеристики движения объекта вдоль направляющей ракетного трека [6].

Таким образом, в современных реалиях, характеризующихся неуклонным ростом скоростей движения тел по направляющим, высокими требованиями, предъявляемыми к безаварийной работе технических систем, и использованием новых конструкционных материалов, весьма актуальным является корректный динамический расчет.



Выбор математической модели

Рассмотрим систему, состоящую из одномерной направляющей и безотрывно движущегося вдоль нее распределенного объекта. В качестве направляющей, представляющей собой упругий элемент конструкции, в определенном диапазоне величин напряжений и скоростей деформаций можно использовать одномерную модель струны, которая широко применяется в инженерных расчетах динамики шахтных подъемников, лентопротяжных механизмов и пр. [7–11]. Отметим, что использование этой модели направляющей обосновано экспериментально и позволяет не только преодолеть математические трудности, встречающиеся при постановке и решении задач для многомерных моделей, сделав ее более обозримой, но и вскрыть основные динамические закономерности поведения конструкции, которые носят общий характер и присущи более сложным моделям направляющих.

Для анализа динамического поведения этой системы воспользуемся постановкой задачи, полученной в работе [12]. Как показывают приведенные в [12] уравнения, в подобных системах, наряду с давлением волн, обусловленным их излучением в направляющую, имеет место распределенное взаимодействие и, следовательно, распределенная сила давления. Проведем оценку этих величин.

Будем считать натяжение N и погонную плотность ρ направляющей постоянными величинами, а движение распределенного объекта переменной плотности $\rho_0 = \rho_0(x-l(t))$ по направляющей происходит по закону $x=l(t)$.

Согласно [12], будем иметь уравнения колебаний направляющей

$$\rho u_{tt} - Nu_{xx} = 0 \quad (x, t) \in \overset{\circ}{D}_1 \cup \overset{\circ}{D}_2 \quad (1)$$

и движущегося объекта

$$(\rho + \rho_0)u_{tt} - Nu_{xx} + \rho_0(u_x \dot{l} + \dot{l}^2 u_{xx} + 2\dot{l}u_{xt}) = 0 \quad (x, t) \in \overset{\circ}{D}_0 \quad (2)$$

на концах которого при $x = l(t)$, $x = l(t) + l_0$, выполнены условия непрерывности

$$u(l-0, t) = u(l+0, t), \quad u(l+l_0-0, t) = u(l+l_0+0, t), \quad (3)$$

и баланса поперечных сил

$$\begin{aligned} [Nu_x + \dot{l}\rho u_t]_{l-0}^{l+0} &= 0 \quad t \in (\alpha, \beta), \\ [Nu_x + \dot{l}\rho u_t]_{l+l_0-0}^{l+l_0+0} &= P(t) \quad t \in (\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (4)$$

где квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин, $P(t)$ – внешняя поперечная сосредоточенная сила; $\overset{\circ}{D}_1$, $\overset{\circ}{D}_0$, $\overset{\circ}{D}_2$ – внутренности областей

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, t): 0 \leq x \leq l(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \\ D_0 &= \{(x, t): l(t) \leq x \leq l(t) + l_0, \alpha \leq t \leq \beta\}, \\ D_2 &= \{(x, t): l(t) + l_0 \leq x \leq b, \alpha \leq t \leq \beta\}. \end{aligned}$$

Движение объекта по направляющей описывается уравнением

$$\begin{aligned}
 \int_l^{l+l_0} \rho_0 \ddot{l} dx = \int_l^{l+l_0} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0' (l^2 + u_x^2 l^2 - u_t^2) - \rho_0 (u_t u_{xt} + u_x u_{tt} + 2 \dot{l} u_x u_{xt} \right. \\
 \left. + \dot{l} u_x^2) \right\} dx + \left[\frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{1}{2} N u_x^2 + l \rho u_t u_x \right]_{l+l_0+0}^{l-0} \\
 + \left[\frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{1}{2} N u_x^2 + l \rho u_t u_x \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \rho_0 (l^2 + u_x^2 l^2 - u_t^2) \right]_{l+0}^{l+l_0-0} + R, \quad t \in (\alpha, \beta).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое, стоящее в правой части, характеризует распределенные силы давления, второе и третье – определяют силы давления, обусловленные излучением волн в направляющую и отражением волн от концов объекта, R – внешняя продольная сила, действующая на объект. В случае равномерного движения объекта, когда скорость его постоянна $\dot{l}(t) = V = \text{const}$, R определяет силу, обеспечивающую заданный закон движения объекта.

Решение поставленной задачи

Система уравнений (1)–(5) существенно не линейна, поэтому для анализа волновых процессов ограничимся случаем равномерного движения объекта со скоростью $V < c$ ($c^2 = N/\rho$). Перейдем к системе координат $\xi = x - Vt$, $\tau = t - xVc^{-2}$, в которой объект неподвижен, а уравнение, описывающее колебания направляющей сохраняет свою форму. В этих переменных уравнения (1)–(4) переписутся в виде

$$u_{\tau\tau} - c^2 u_{\xi\xi} = 0, \quad (6)$$

$$(\rho c^2 + \rho_0(c^2 - V^2)) u_{\tau\tau} - \rho c^4 u_{\xi\xi} = 0, \quad (7)$$

$$u(-0, \tau) = u(+0, \tau), \quad u(l_0 - 0, \tau) = u(l_0 + 0, \tau), \quad (8)$$

$$[u_\xi]_{-0}^{+0} = 0, \quad [u_\xi]_{l_0-0}^{l_0+0} = \frac{P}{\rho(c^2 - V^2)}, \quad (9)$$

и допускают разделения переменных.

Решение вне объекта будет представлять собой гармонические волны вида $u_\nu = A_\nu \exp(i\omega_\nu \tau - ik_\nu \xi)$. Здесь A_ν – комплексные постоянные величины, индексы $\nu = 1$ и $\nu = 2$ соответствуют областям слева и справа от объекта, а частоты ω_ν и волновые числа k_ν связаны посредством получаемых из (6) дисперсионных соотношений, которые, с учетом условий излучения Мандельштама [2, 8], имеют вид: $k_1 = -\omega_1/c$, $k_2 = -\omega_2/c$.

В области $0 < \xi < l_0$ решение будем искать в форме

$$u_0(\xi, \tau) = X(\xi) \exp(i\omega_0 \tau).$$

Для определения функции $X(\xi)$ из (7) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$X''(\xi) + \alpha(\xi) \omega_0^2 X(\xi) = 0, \quad \text{где } \alpha(\xi) = \frac{\rho c^2 + \rho_0(c^2 - V^2)}{\rho c^4}. \quad (10)$$

Как известно [13], для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами не существует общего метода интегрирования. В большинстве случаев для нахождения решения прибегают либо к численным, либо к различным приближенным методам [14, 15]. Поэтому для получения точного аналитического решения рассмотрим ситуацию, когда по направляющей движется распределенный объект постоянной погонной плотности $\rho_0 = \text{const}$, при этом



$$\alpha = \frac{\rho c^2 + \rho_0(c^2 - V^2)}{\rho c^4} = \text{const.}$$

Решая краевую задачу (6)–(9) и возвращаясь к исходным переменным, получим, что решение внутри объекта имеет вид

$$u_0(x, t) = e^{i\omega_0(1-V^2/c^2)t} \{C_1 e^{i\omega_0\sqrt{\alpha}(x-Vt)} + C_2 e^{i\omega_0\sqrt{\alpha}(x-Vt)}\},$$

а вне распределенного объекта: $u_1(x, t) = A_1 e^{i\omega_1(1-V/c)(t+x/c)}$ в области $x \leq Vt$ и $u_2(x, t) = A_2 e^{i\omega_2(1-V/c)(t+x/c)}$ в области $x \geq Vt + l_0$. Здесь частоты $\omega_{0,1,2}$ и комплексные амплитуды $C_{1,2}$, $A_{1,2}$ определяются по формулам: $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \Omega/(1 - V^2/c^2)$,

$$C_1 = \frac{iP_0 c(c\sqrt{\alpha} + 1)}{\rho\omega_0(c^2 - V^2) \left\{ (c\sqrt{\alpha} + 1)^2 \exp(il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) - (c\sqrt{\alpha} - 1)^2 \exp(-il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) \right\}},$$

$$C_2 = \frac{iP_0 c(c\sqrt{\alpha} - 1)}{\rho\omega_0(c^2 - V^2) \left\{ (c\sqrt{\alpha} + 1)^2 \exp(il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) - (c\sqrt{\alpha} - 1)^2 \exp(-il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) \right\}},$$

$$A_1 = \frac{2iP_0 c^2 \sqrt{\alpha}}{\rho\omega_0(c^2 - V^2) \left\{ (c\sqrt{\alpha} + 1)^2 \exp(il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) - (c\sqrt{\alpha} - 1)^2 \exp(-il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) \right\}},$$

$$A_2 = \frac{iP_0 c \left\{ (c\sqrt{\alpha} + 1)e^{i\omega_0 l_0 \sqrt{\alpha}} + (c\sqrt{\alpha} - 1)e^{i\omega_0 l_0 \sqrt{\alpha}} \right\} \exp(i\omega_0 l_0 / c)}{\rho\omega_0(c^2 - V^2) \left\{ (c\sqrt{\alpha} + 1)^2 \exp(il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) - (c\sqrt{\alpha} - 1)^2 \exp(-il_0\omega_0\sqrt{\alpha}) \right\}},$$

где Ω , P_0 – частота и амплитуда внешнего поперечного источника гармонических колебаний.

Анализ волновых процессов

На основе полученного решения вычислим средние по времени за период $2\pi/\Omega$ значения сил давления. Как показывают расчеты, распределенные силы давления компенсируются силами давления волн, обусловленными отражением от концов, и движение осуществляется только под действием реакции излучения волн в направляющую. Обозначив через F_{pr} постоянную составляющую суммарных сил, обусловленных давлением волн, возбуждаемых впереди ($x > Vt + l_0$) и позади ($x < Vt$) движущегося объекта, будем иметь

$$F_{pr} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (1 - c^{-2} V^{-2}) \left\{ (1 - c^{-1} V)(a_1^2 + b_1^2) - (1 + c^{-1} V)(a_2^2 + b_2^2) \right\} =$$

$$= \frac{P_0^2 \left\{ \alpha c^2 (1 - c^{-1} V) - (1 + c^{-1} V)(1 + (\alpha c^2 - 1) \cos^2(\omega_0 l_0 \sqrt{\alpha})) \right\}}{2\rho(c^2 - V^2)\Delta},$$

где $a_1 = \text{Re}A_1$, $b_1 = \text{Im}A_1$, $a_2 = \text{Re}A_2$, $b_2 = \text{Im}A_2$,

$$\Delta = 4c^2\alpha + (c^2\alpha - 1)^2 \sin^2(\omega_0 l_0 \sqrt{\alpha}),$$

которая, в зависимости от скорости движения объекта и частоты источника колебаний может быть как положительной, так и отрицательной (рис. 1).

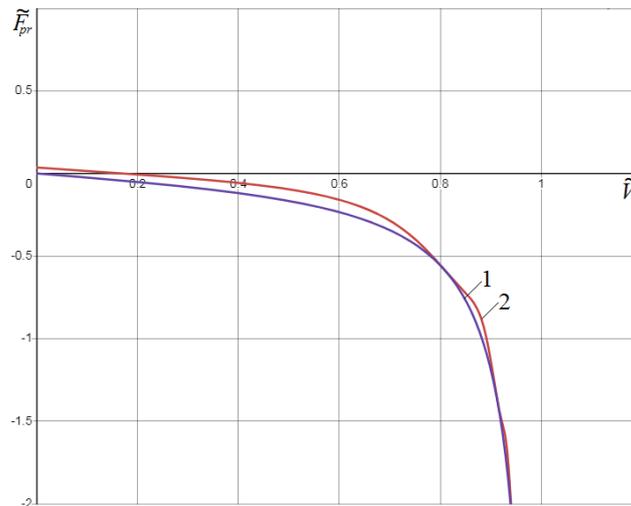


Рис. 1. Постоянная составляющая силы давления волн в зависимости от скорости движения объекта в случае: 1) $\Omega = 0$, 2) $\Omega \neq 0$

Графики, представленные на рис. 1, построены для безразмерных переменных $\tilde{F}_{pr} = NF_{pr}/P_0^2$, $\tilde{V} = V/c$ при следующих значениях параметров: $\rho_0/\rho = 0.5$, $l_0\Omega/c = 1$.

Если на объект действует постоянный источник силы $\Omega=0$, то $F_{pr}=0$ в случае неподвижного объекта и $F_{pr}<0$ при его движении (рис. 1, кривая 1). Значит, сила волнового давления оказывает сопротивление движению объекта. В случае переменного источника $\Omega \neq 0$ постоянная составляющая силы реакции со стороны направляющей (сил давления волн) может быть как положительной (рис. 1, кривая 2), т. е. способствовать движению объекта, так и отрицательной, т. е. препятствовать его движению. При движении объекта со скоростью, близкой к скорости поперечных волн в струне c , сила сопротивления движению может быть сколь угодно велика, поэтому движение со скоростями близкими к c невозможно.

На рис. 2 представлена зависимость длины распределенного объекта от скорости его движения, при которой среднее значение результирующей силы давления волн обращается в ноль.

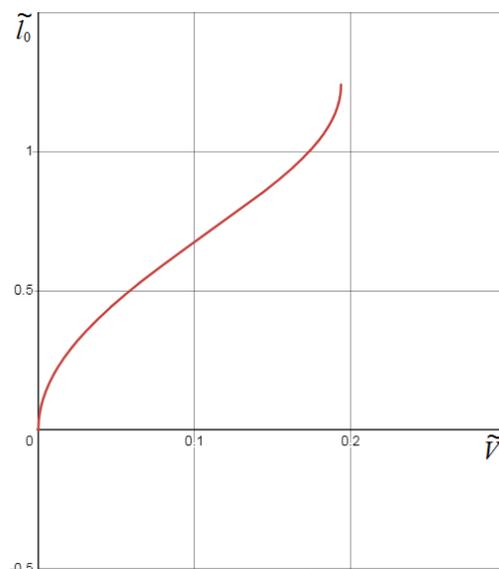


Рис. 2. Безразмерная длина $\tilde{l}_0 = l_0 \Omega / c$ распределенного объекта, при которой $F_{pr} = 0$, в зависимости от безразмерной скорости $\tilde{V} = V/c$ для $\rho_0/\rho = 0.5$

Видно, что для неподвижного ($V=0$) сосредоточенного ($l_0 \rightarrow 0$) объекта, на который действует гармонический источник колебаний, постоянная составляющая силы волнового давления равна нулю и отлична от нуля в случае неподвижного распределенного ($l_0 \rightarrow 0$) объекта. При движении со скоростью $V < c$ сосредоточенного объекта, являющегося носителем гармонического источника колебаний, постоянная составляющая силы знакоотрицательна и знакопеременна в случае распределенного объекта. Таким образом, возможно снижение сопротивления движению распределенных объектов с точечными источниками гармонических колебаний за счет излучения волн в направляющие.

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы для анализа фундаментальных задач волновой динамики упругих систем, в том числе связанных с эффектом снижения сопротивления движению тел вдоль упругих направляющих путем вибрационного на них воздействия.

Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF -2024-0031, № НИОКТР 1023032800130-3-2.3.2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Fryba, L. Vibration of solids and structures under moving loads. 3rd ed. / L. Fryba. – London : Thomas Telford. – 1999. – 494 p. – ISBN 978-94-011-9687-1.
2. Весницкий, А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками / А. И. Весницкий. – Москва : Физматлит. – 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0172-2. – Текст : непосредственный.
3. Литвинов, В. Л. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами : монография / В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов. – Самара : СГТУ. – 2017. – 149 с. – ISBN 978-5-7964-4984-7. – Текст : непосредственный.
4. Руденко, О. В. Движущийся объект: спектры сигналов пассивной, активной



локации и переходное излучение / О. В. Руденко, В. А. Гусев. – Текст : непосредственный // Акустический журнал. – 2020. – Том 66, № 6. – С. 599–609.

5. Динамика строительных конструкций при экстремальных природных воздействиях: колебания, прочность, ресурс / П. А. Хазов, Д. А. Кожанов, А. М. Анущенко, А. А. Сатанов. – Нижний Новгород : ННГАСУ. – 2022. – 96 с. – ISBN 987-5-528-00475-4. – Текст : непосредственный.

6. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека / С. В. Бутова, С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев, В. Г. Камчатный. – Текст : непосредственный // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 1. – С. 3–8.

7. Савин, Г. Н. Динамика нити переменной длины (применительно к шахтным подъемам) / Г. Н. Савин, О. А. Горошко. – Киев : АН УССР. – 1962. – 332 с. – Текст : непосредственный.

8. Весницкий, А. И. Избранные труды по механике / А. И. Весницкий. – Нижний Новгород : Наш дом. – 2010. – 248 с. – ISBN 978-5-902390-12-1. – Текст : непосредственный.

9. Lateral response and energetics of cable-guided hoisting system with time-varying length / G. Cao, J. Wang, Z. Zhu, Y. Wang, W. Peng // Journal of Vibroengineering. – 2015. – Vol. 17 (8). – P. 4575–4588.

10. Gaiko, N. V. On transversal oscillations of a vertically translating string with small time-harmonic length variations / N. V. Gaiko, W. T. van Horssen // Journal of Sound and Vibration. – 2016. – Vol. 383. – P. 339–348.

11. Юницкий, А. Э. Струнные транспортные системы: на Земле и в Космосе / А. Э. Юницкий. – Минск : Силакросс : ПНБ принт. – 2019. – 576 с. – ISBN 978-985-90498-1-1. – Текст : непосредственный.

12. Лисенкова, Е. Е. Примеры постановок задач о движении распределенного объекта вдоль упругой системы / Е. Е. Лисенкова. – Текст : непосредственный // Прикладная механика и технологии машиностроения : сборник научных трудов / под редакцией В. И. Ерофеева. – Нижний Новгород : Интелсервис. – 2010. – № 2 (17). – С. 261–263.

13. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Наука. – 1969. – 320 с. – Текст : непосредственный.

14. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука. – 1973. – 834 с. – Текст : непосредственный.

15. Горбачев, В. И. Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами / В. И. Горбачев. – Текст : непосредственный // Чебышевский сборник. – 2019. – Том 20, Выпуск 4. – С. 108–123.

EROFEEV Vladimir Ivanovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, director; LISENKOVA Elena Evrenievna, candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher

MOVEMENT OF A DISTRIBUTED OBJECT ON A ONE-DIMENSIONAL ELASTIC GUIDES UNDER THE INFLUENCE OF RADIATION REACTION

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, branch of A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences
85, Belinsky St., Nizhny Novgorod, Russia. Tel.: +7 (831) 432-03-00;
e-mail: erof.vi@yandex.ru , eelissen@yandex.ru

Key words: elastic one-dimensional system, moving distributed object, wave pressure, resistance to motion.



We consider the dynamic behavior of a deformable system consisting of a one-dimensional elastic guide (subsystem 1) and a one-dimensional distributed object continuously moving along it (subsystem 2). A formulation of a self-consistent boundary value problem is presented that correctly takes into account the interaction forces in the region of coupling of subsystems. In the case of uniform motion of a distributed object of constant density, an exact analytical solution to the problem of forced oscillations is found. An expression is obtained for the force caused by the pressure of the waves (the force of resistance to movement). The dependence of the constant component of this force on the speed of movement of the object and the frequency of external influence is investigated. The possibility of reducing the resistance to movement of a distributed object under vibration has been established due to the radiation of waves into the guide.

REFERENCES

1. Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads. 3rd ed. London: Thomas Telford, 1999. 494 p. – ISBN 978-94-011-9687-1.
2. Vesnitskiy A. I. Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami [Waves in systems with moving boundaries and loads]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p. – ISBN 5-9221-0172-2.
3. Litvinov V. L., Anisimov V. N. Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie kolebaniy odnomernykh mekhanicheskikh sistem s dvizhushchimisya granitsami [Mathematical modeling and investigation of vibrations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries] : monografiya // Samar. gos. tekhn. un-t. – Samara, 2017. – 149 p. – ISBN 978-5-7964-4984-7.
4. Rudenko O. V., Gusev V. A. Dvizhushchiysya obiekt: spektry signalov passivnoy, aktivnoy lokatsii i perekhodnoe izluchenie [Moving object: spectra of signals of passive, Active Location and Transient Radiation] // Akust. zhurn. [Akusticheskij zhurnal]. 2020. Vol. 66. № 6. P. 599–609.
5. Khazov P. A., Kozhanov D. A., Anushchenko A. M., Satanov A. A. Dinamika stroitelnykh konstruksiy pri ekstremalnikh prirodnykh vozdeystiyakh: kolebaniya, prochnost, resurs [Dynamics of building structures under extreme natural influences: vibrations, strength, resource]. Nizhny Novgorod: NNGASU. 2022. – 96 p. ISBN 987-5-528-00475-4.
6. Butova S. V., Gerasimov S. I., Erofeev V. I., Kamchatniy V. G. Ustoychivost dvizheniya visokoskorostnykh obektov po naptavliayushchim raketnogo treka [Stability of the movement of high-speed objects along the guides of the rocket track] // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin [Problems of mechanical engineering and machine reliability]. 2015. № 1. P. 3-8.
7. Savin G. N., Goroshko O. A. Dinamika niti peremennoy dliny (primenitelno k shakhtnym podemam) [The dynamics of the thread of variable length (in relation to mine lifts)]. Kiev: AN USSR, 1962. – 332 p.
8. Vesnitskiy A. I. Izbrannye trudy po mekhanike. [Selected works on mechanics]. Nizhny Novgorod: Nash dom. 2010. – 248 p. – ISBN 978-5-902390-12-1.
9. Cao G., Wang J., Zhu Z., Wang Y., Peng W. Lateral response and energetics of cable-guided hoisting system with time-varying length // Journal of Vibroengineering. 2015. Vol. 17. № 8. P. 4575–4588.
10. Gaiko N. V., Horssen van W. T. On transversal oscillations of a vertically translating string with small time-harmonic length variations // Journal of Sound and Vibration. 2016. Vol. 383. P. 339–348.
11. Yunitskiy A. E. Strunnye transportnye sistemy: na Zemle i v Kosmose [String transport systems: on Earth and in Space]. Minsk: Silakrogs: “PNB print”. 2019. – 576 p. –



ISBN 978-985-90498-1-1.

12. Lisenkova E. E. Primery postanovok zadach o dvizhenii raspredelenного obiekta vdol uprugoy sistemy [Examples of problem statements about the motion of a distributed object along an elastic system] // Prikladnaya mekhanika i tekhnologii mashinostroeniya [Applied mechanics and engineering technologies]: sb. nauchn. trudov/ pod red. V. I. Erofeeva. Nizhny Novgorod: Intelservis, 2010. № 2 (17). P. 261–263.

13. Elsgolts L. E. Differentsialnye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and variable calculus]. Moscow: Nauka, 1969. – 320 p.

14. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Mathematical handbook for scientists and engineers]. Moscow: Nauka. 1973. – 832 p.

15. Gorbachev V. I. Primenenie integralnykh formul dlya resheniya obyknovennykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s peremennymi koeffitsientami [Application of integral formulas for solving ordinary differential equations of the second order with variable coefficients] // Chebyshevskiy sbornik [Chebyshevskii Sbornik]. 2019. Vol. 20. Issue 4. P. 108–123.

© **В. И. Ерофеев, Е. Е. Лисенкова, 2024**

Получено: 15.06.2024 г.