

УДК 519.633

С. В. БАКУШЕВ, д-р техн. наук, проф. кафедры механики

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ  
ИДЕАЛЬНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ  
ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ДИАГРАММ ОБЪЕМНОГО И СДВИГОВОГО  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ  
Часть 2**

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства»  
Россия, 440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, д. 28, Тел./факс: (8412) 49-72-77;  
эл. почта: roffice@pguas.ru

*Ключевые слова:* сплошная среда, осесимметричная деформация, квадратичная аппроксимация, дифференциальные уравнения равновесия, геометрическая нелинейность.

---

*Получены дифференциальные уравнения равновесия геометрически и физически нелинейной идеально упругопластической сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, при аппроксимации диаграмм объемного и сдвигового деформирования квадратичными функциями.*

---

**Введение.** Строительные материалы и изделия из них проявляют как упругие при малых уровнях внешних нагрузок, так и пластические свойства, если внешние воздействия значительны. Следствием пластических свойств материалов и изделий является не только появление в них остаточных деформаций при снятии внешнего воздействия, но и значительные перемещения в процессе активного нагружения – геометрическая нелинейность.

Теория идеальной пластичности Прандтля является одной из наиболее важных и значимых теорий, описывающих деформирование конструкций с учетом пластических свойств материала.

Мы будем рассматривать материал, механические свойства которого с учетом геометрической нелинейности характеризуются тем, что зависимость между первыми инвариантами обобщенных тензоров напряжений и нелинейных деформаций, и зависимость между вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и нелинейных деформаций описывается некоторыми нелинейными функциями, причем на диаграмме сдвиговых деформаций наблюдается участок, близкий к площадке текучести [1, 2].

Задачи расчета конструкций с учетом пластических деформаций, по сути, являются задачами, в которых напряженно-деформированное состояние определяется с учетом реальных свойств материалов, а потому интерес к ним не только не ослабевает, но и существенно растет, учитывая возможности с использованием современных информационных технологий решать задачи с учетом геометрической нелинейности. В последние годы многие работы отечественных ученых посвящены вопросам прочностного и деформационного расчета неупругих тел, находящихся в условиях осесимметричной задачи [3, 4, 5, 11, 12]. Изучению влияния неоднородности структуры конструктивных

материалов на их деформационные, пластические и прочностные свойства посвящены работы многих зарубежных авторов [6, 7, 8, 9, 10]. Эти материалы обладают значительной объемной сжимаемостью при пластическом деформировании, упрочнением, эффектом дилатансии, взаимосвязью процессов сдвигового и объемного деформирования. В статье [13] приведены результаты численного решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния ортотропного цилиндра с использованием вариационного условия равновесного протекания процесса деформирования с учетом конечных деформаций. В работах [14, 15] моделируется напряженно-деформированное состояние неупругой сплошной среды в условиях осесимметричной деформации. Сплошная среда принимается изотропной, трансверсально изотропной, с упруговязкопластическими свойствами. В работе [16] затрагиваются вопросы выбора математических моделей при статических и сейсмических расчетах напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин с использованием программно-математического обеспечения персональных компьютеров. Для моделирования грунтовых, нелинейно-деформируемых массивов программными комплексами используются различные варианты моделей, основанных на гиперболической зависимости между напряжениями и деформациями [17, 18, 19]. В работе [20] на базе модели жесткопластического тела, условия пластичности Мизеса и соотношений теории пластического течения рассмотрена задача пластического деформирования защемленных по контуру круглых пластинок под действием локальной осесимметричной нагрузки с учетом больших прогибов.

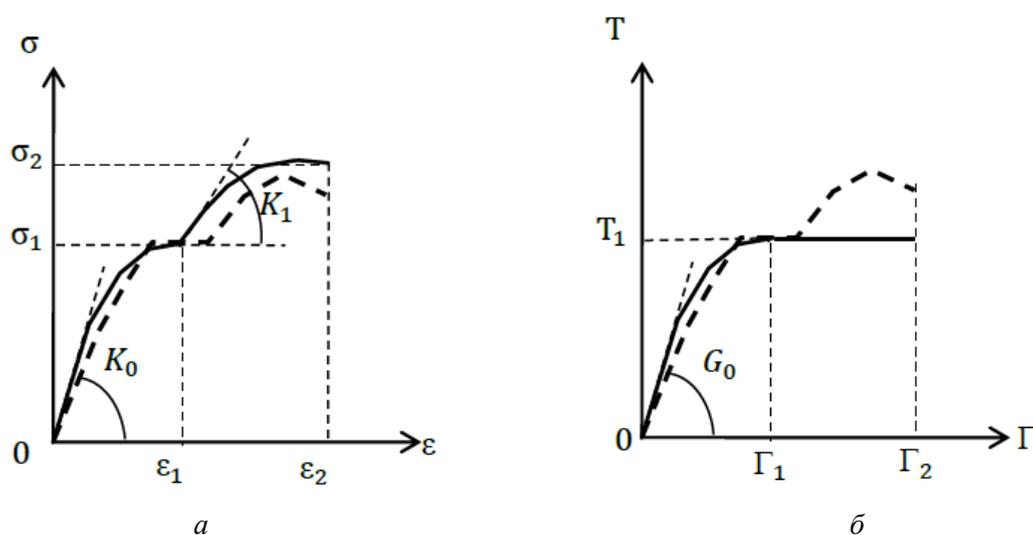


Рис. 1: а – диаграмма  $\sigma - \varepsilon$ ; б – диаграмма  $T - \Gamma$ .

Пунктирные толстые линии – исходные кривые объемного и сдвигового деформирования; сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объемных деформаций сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования  $u_r = u(r)$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = 0$ , при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида квадратичными функциями для геометрически нелинейной

модели сплошной среды (рис. 1). Построение дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объемных деформаций сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования:  $u_r = u(r)$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = 0$ , при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида билинейными функциями [21] как для геометрически линейной, так и для геометрически нелинейной модели сплошной среды выполнено в работе [22].

**Построение физических уравнений для геометрически нелинейной модели.** Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды [2] описываются соотношениями, устанавливающими в самом общем случае перекрестные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и нелинейных деформаций:

$$K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), \quad G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), \quad (1)$$

где  $\sigma^*$  – первый инвариант тензора обобщенных напряжений;  $\varepsilon^*$  – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;  $T^*$  – интенсивность обобщенных касательных напряжений;  $\Gamma^*$  – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Аппроксимируя зависимости (1) двумя квадратичными функциями каждую, нетрудно получить секущие модули объемного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  на первом и втором криволинейных участках диаграмм  $\sigma^* - \varepsilon^*$  и  $T^* - \Gamma^*$ , аналогичных соотношениям (1) – (4) – см. часть 1 статьи. При этом все величины следует записывать со звездочками:

$$K^{*I}(\varepsilon^*) = \frac{1}{3}K_0^* + K_{01}^*\varepsilon^*; \quad G^{*I}(\Gamma^*) = G_0^* + G_{01}^*\Gamma^*, \quad (2)$$

$$\text{где } K_{01}^* = \frac{\sigma_1^* - K_0^*\varepsilon_1^*}{3\varepsilon_1^{*2}}; \quad G_{01}^* = \frac{T_1^* - G_0^*\Gamma_1^*}{\Gamma_1^{*2}}. \quad (3)$$

На втором криволинейном участке диаграмм  $\sigma^* - \varepsilon^*$  и  $T^* - \Gamma^*$  секущий модуль объемного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и секущий модуль сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  будут вычисляться по формулам:

$$K^{*II}(\varepsilon^*) = a_1^*\varepsilon^* + b_1^* + \frac{c_1^*}{\varepsilon^*}; \quad G^{*II}(\Gamma^*) = \frac{T_1^*}{\Gamma^*}, \quad (4)$$

$$\text{где } a_1^* = \frac{(\sigma_2^* - \sigma_1^*) - K_1(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)}{3(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)^2}; \quad b_1^* = \frac{1}{3} \left[ K_1^* - 2 \frac{(\sigma_2^* - \sigma_1^*) - K_1(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)}{(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)^2} \varepsilon_1^* \right];$$

$$c_1^* = \frac{1}{3} \left[ \sigma_1^* - K_1^*\varepsilon_1^* - \frac{(\sigma_2^* - \sigma_1^*) - K_1(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)}{(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)^2} \varepsilon_1^{*2} \right]. \quad (5)$$

Таким образом,  $K_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля объемного расширения (сжатия);  $G_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига;  $K_1^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при объемном расширении (сжатии);  $G_1^* = 0$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге;  $\sigma_1^*$ ,  $\varepsilon_1^*$  – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме  $\sigma^* - \varepsilon^*$ ;  $T_1^*$ ,  $\Gamma_1^*$  – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме  $T^* - \Gamma^*$ ;  $\sigma_2^*$ ,  $\varepsilon_2^*$  – координаты конечной точки второго участка на диаграмме  $\sigma^* - \varepsilon^*$ ;  $T_2^*$ ,  $\Gamma_2^*$  – координаты конечной точки второго участка на диаграмме  $T^* - \Gamma^*$ .

Физические соотношения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая осесимметричного деформирования будут записываться в



форме, аналогичной соотношениям (10), (12), (14), (18) части 1 статьи (если у всех величин, входящих в эти формулы проставить звездочки).

$$\begin{aligned} \text{Случай 1: } \sigma_{rr}^* &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{zz}^* &= \left[K^{*I}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3}G^{*I}(\Gamma^*)\right] \varepsilon^*. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Случай 2: } \sigma_{rr}^* &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{zz}^* &= \left[K^{*II}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3}G^{*I}(\Gamma^*)\right] \varepsilon^*. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Случай 3: } \sigma_{rr}^* &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{zz}^* &= \left[K^{*I}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3}G^{*II}(\Gamma^*)\right] \varepsilon^*. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Случай 4: } \sigma_{rr}^* &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{zz}^* &= \left[K^{*II}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3}G^{*II}(\Gamma^*)\right] \varepsilon^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Случай 5:  $\left.\frac{d\sigma^*(\varepsilon^*)}{d\varepsilon^*}\right|_{\varepsilon^*=\varepsilon_1^*} = K_1^*$ ,  $\left.\frac{d\Gamma^*(\Gamma^*)}{d\Gamma^*}\right|_{\Gamma^*=\Gamma_1^*} \neq G_1^*$ , то есть точка излома графика на квадратичной диаграмме  $\sigma^* - \varepsilon^*$  отсутствует. При этом, если  $0 \leq \Gamma^* \leq \Gamma_1^*$ , то физические уравнения осесимметричного деформирования будут иметь вид (6); если  $\Gamma^* \geq \Gamma_1^*$ , то физические уравнения осесимметричного деформирования будут иметь вид (8).

**Построение дифференциальных уравнений для геометрически нелинейной модели.** Дифференциальное уравнение равновесия для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая осесимметричного деформирования имеет вид [4]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \sigma_{rr}^* \right] + \frac{1}{r} \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \sigma_{rr}^* - \left(1 + \frac{u}{r}\right) \sigma_{\varphi\varphi}^* \right] + F_r^* = 0. \quad (10)$$

При осесимметричном деформировании сплошной среды, описываемой геометрически нелинейной моделью

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \text{ и } \Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{rr}^{*2} - \varepsilon_{rr}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{*2}},$$

$$\text{причем } \varepsilon_{rr}^* = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{r}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial r} &= \frac{\partial \varepsilon_{rr}^*}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{\partial r} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right); \\ \frac{\partial \Gamma^*}{\partial r} &= \frac{2}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \frac{\partial \varepsilon_{rr}^*}{\partial r} + \frac{2}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*) \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{\partial r} = \\ &= \frac{2}{3\Gamma^*} \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{r}\right)^2 \right] \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \\ &+ \frac{2}{3\Gamma^*} \left[ 2 \frac{u}{r} + \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \right] \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right). \end{aligned}$$

Подставляя физические уравнения в дифференциальное уравнение равновесия осесимметричного деформирования сплошной среды при учете



геометрической нелинейности (10), получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$A^* \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B^* + DF_r = 0, \quad (11)$$

где  $D = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(1 + \frac{u}{r}\right)$ .

Коэффициенты  $A^*$  и  $B^*$  в уравнении (11) зависят от вида физических уравнений.

Геометрически нелинейный аналог соотношений (21) части 1 статьи имеет вид:

$$\begin{aligned} A^* &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 [K^{*I}(\varepsilon^*) + \\ &+ K_{01}^* \varepsilon^* + \frac{4}{3}G^{*I}(\Gamma^*)] + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \frac{4G_{01}^*}{3\Gamma^{*3}} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \times \\ &\times \left[2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{u}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2\right]; \\ B^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) [K^{*I}(\varepsilon^*) + K_{01}^* \varepsilon^* - \frac{2}{3}G^{*I}(\Gamma^*)] \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{4G_{01}^*}{3\Gamma^{*3}r} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \left[2 \frac{u}{r} + \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right] \times \\ &\times \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) [K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \times \\ &\times \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right)] - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) [K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Геометрически нелинейный аналог соотношений (22) части 1 статьи записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} A^* &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 [K^{*II}(\varepsilon^*) + \\ &+ \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}}\right) \varepsilon^* + \frac{4}{3}G^{*I}(\Gamma^*)] + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \frac{4G_{01}^*}{3\Gamma^{*3}} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \times \\ &\times \left[2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{u}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2\right]; \\ B^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) [K^{*II}(\varepsilon^*) + \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}}\right) \varepsilon^* - \frac{2}{3}G^{*I}(\Gamma^*)] \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{4G_{01}^*}{3\Gamma^{*3}r} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \left[2 \frac{u}{r} + \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial r} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right] \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) [K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \times \\ &\times \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right)] - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) [K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Геометрически нелинейный аналог соотношений (23) части 1 статьи имеет вид:

$$\begin{aligned} A^* &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 [K^{*I}(\varepsilon^*) + \\ &+ K_{01}^* \varepsilon^* + \frac{4}{3}G^{*II}(\Gamma^*)] - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \frac{4\Gamma_1^*}{3\Gamma^{*3}} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \times \\ &\times \left[2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{u}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2\right]; \\ B^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) [K^{*I}(\varepsilon^*) + K_{01}^* \varepsilon^* - \frac{2}{3}G^{*II}(\Gamma^*)] \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) - \\ &- \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{4\Gamma_1^*}{3\Gamma^{*3}r} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \left[2 \frac{u}{r} + \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right] \left(1 + \frac{u}{r}\right) \times \end{aligned} \quad (14)$$



$$\begin{aligned} & \times \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[ K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left( \varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] - \\ & - \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{u}{r} \right) \left[ K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left( \varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right]. \end{aligned}$$

Геометрически нелинейный аналог соотношений (24) части 1 статьи получает вид:

$$\begin{aligned} A^* &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left( \varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \left[ K^{*II}(\varepsilon^*) + \right. \\ & \left. + \left( a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* + \frac{4}{3} G^{*II}(\Gamma^*) \right] - \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \frac{4\Gamma_1^*}{3\Gamma^{*3}} \left( \varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \times \\ & \times \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right]; \quad (15) \\ B^* &= \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[ K^{*II}(\varepsilon^*) + \left( a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* - \frac{2}{3} G^{*II}(\Gamma^*) \right] \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{u}{r} \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) - \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{4\Gamma_1^*}{3\Gamma^{*3}r} \left( \varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[ 2 \frac{u}{r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{u}{r} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \times \\ & \times \left[ K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left( \varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] - \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{u}{r} \right) \times \\ & \times \left[ K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left( \varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right]. \end{aligned}$$

В уравнениях (12)–(15)

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{rr}^{*2} - \varepsilon_{rr}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{*2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right]^2 - \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] \left[ \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right] + \left[ \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right]^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие напряженно-деформированное состояние идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейно-упругой в отношении объемных деформаций сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений с учетом геометрически нелинейности, построены.

**Заключение.** Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейно-упругой в отношении объемных деформаций сплошных сред, находящихся в условиях осесимметричного деформирования, замыкающие уравнения физических соотношений, для которых описываются квадратичными функциями.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новожилов, В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов. – Ленинград : Судпромгиз, 1958. – 370 с. – Текст : непосредственный.
2. Бакушев, С. В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. – Москва : Либроком, 2020. – 312 с. – ISBN 978-5-397-07148-2. – Текст : непосредственный.
3. Воронцов, А. Л. Пластические задачи в технологии металлов. осесимметричная задача. Часть 1. определяющие уравнения и состояние вопроса / А. Л. Воронцов, Ю. Х. Хациев. – Текст : электронный // Справочник. Инженерный

журнал с приложением. – 2018. – № S1. – С. 9–18. – DOI: 10.14489/hb.suppl.2018.01.P.009-018.

4. Ломакин, Е. В. Кручение цилиндрических тел с изменяющимися деформационными свойствами / Е. В. Ломакин. – Текст : непосредственный // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 217–226.

5. Ломакин, Е. В. Напряжения и деформации в диске из физически нелинейного материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами / Е. В. Ломакин, О. П. Щендригина. – Текст : электронный // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 4. – С. 25–33. – DOI: 10.31857/S0572329920040091.

6. Cazacu, O. Analytic plastic potential for porous aggregates with matrix exhibiting tension-compression asymmetry / O. Cazacu, J. Stewart // J. Mech. Phys. Solids. – 2009. – V. 57. – P. 325–341.

7. Pietruszczak, S. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor / S. Pietruszczak, Z. Mroz // Comput. Geotech. – 2000. – V. 26. – P. 105–112.

8. Gao, Z. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials / Z. Gao, J. Zhao, Y. Yao // Int. J. Solid Struct. – 2010. – V. 47. – P. 3166–3185.

9. Experiments and theory in strain gradient elasticity / D.C.C. Lam, F. Yang, A.C.M. Chong, J. Wang, P. Tong // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. – V. 51. – P. 1477–1508.

10. McFarland, A. W. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors / A. W. McFarland, J. S. Colton, // J. Micromech. Microeng. – 2005. V. 15. – P. 1060–1067.

11. Панов, С. И. Деформации глинистых грунтов при циклическом нагружении / С. И. Панов, А. Л. Гольдин. – Текст : непосредственный // Известия Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники им. Б.Е. Веденеева. – 2016. – Том 280. – С. 79–86.

12. Протосеня, А. Г. Физически нелинейно-пластическая задача о распределении напряжений вокруг выработки кругового очертания / А. Г. Протосеня. – Текст : непосредственный // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2014. – № 2. – С. 43–48.

13. Астапов, Ю. В. конечные деформации ортотропного цилиндра при нагружении внутренним давлением / Ю. В. Астапов. – Текст : непосредственный // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2015. – № 4. – С. 113–118.

14. Магдеев, У. Х. К математической постановке задачи об определении осесимметричных деформаций конструкций из неоднородно ортотропных материалов / У. Х. Магдеев, В. И. Морозов, Ю. В. Пухаренко. – Текст : электронный // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2016 году : сборник научных трудов РААСН. Сер. "Научные труды РААСН" Российская академия архитектуры и строительных наук. – Москва, 2017. – С. 227–230. – DOI: 10.22337/9785432302212-2017-227-230.

15. Гоцев, Д. В. Напряженное состояние неограниченного пространства вблизи цилиндрической полости с некруговой формой поперечного сечения для стареющих упруговязкопластических материалов / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Ю. Яковлев. – Текст : электронный // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 134–140. – DOI: 10.31857/S0572329920060082.

16. Ляпичев, Ю. П. Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин / Ю. П. Ляпичев. – Текст : электронный // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Том 16, № 4. – С. 261–270. – DOI: 10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270.

17. Benz, T. Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences / T. Benz // Stuttgart. – 2007. – 193 p.



18. Schanz T. The hardening soil model: Formulation and verification / T. Schanz, P. A. Vermeer, P. G. Bonnier // In beyond 200 in Computational Geotechnics, 1999. – P. 281–296.

19. Roscoe, K. H. On the generalised stress-strain behaviour of ‘wet’ clay, Eng. Plasticity / K. H. Roscoe, J. B. Burland. – Cambridge Univ. Press, 1968. – P. 585–609.

20. Старов, А. В. Пластическое деформирование круглых пластинок с жестким защемлением края при локальном нагружении / А. В. Старов. – Текст : непосредственный // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2013. – № 34 (53). – С. 99–106.

21. Бакушев, С. В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями / С. В. Бакушев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – № 2 (283). – С. 2–11.

22. Бакушев, С. В. Дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной деформации идеально упругопластического элемента конструкции при сложном напряжённом состоянии / С. В. Бакушев. – Текст : непосредственный // Региональная архитектура и строительство. – 2020. – № 1(42). – С. 140–155.

23. Бакушев, С. В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями / С. В. Бакушев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2020. – № 3 (290). – С. 2–14.

**BAKUSHEV Sergey Vasilevich, doctor of technical sciences, professor of the chair of mechanics**

**DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EQUILIBRIUM OF IDEALLY ELASTOPLASTIC CONTINUOUS MEDIUM FOR AXIALLY SYMMETRIC DEFORMATION AT APPROXIMATION OF VOLUME AND SHEAR DEFORMATION DIAGRAMS WITH QUADRATIC FUNCTIONS**

**Part 2**

Penza State University of Architecture and Construction  
28, German Titov St., Penza, 440028, Russia. Tel.: +7 (8412) 49-72-77;  
e-mail: office@pguas.ru

*Key words:* continuum, axisymmetric deformation, quadratic approximation, differential equilibrium equations, geometric nonlinearity.

---

*In Part 2 of the article, the differential equations of equilibrium of a geometrically and physically nonlinear ideally elastoplastic continuous medium under conditions of axisymmetric deformation are obtained by approximation of volumetric and shear deformation diagrams by quadratic functions.*

---

REFERENCES

1. Novozhilov V. V. Teoriya uprugosti [The theory of elasticity]. Leningrad: Sudpromgiz, 1958. – 370 p.
2. Bakushev S. V. Geometricheski i fizicheski nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy: Ploskaya zadacha [Geometrical and physic non-linear mechanic of continuous mediums: Plane problem]. Moscow: Librokom, 2020. – 312 p.
3. Vorontsov A. L., Khatsiev Yu. Kh. Plasticheskie zadachi v tekhnologii metallov. osesimmetrichnaya zadacha. Chast 1. opredelyayushchie uravneniya i sostoyanie voprosa [Plastic problems in technology of metals. symmetric problem. Part. 1. Defining equations and

condition of question]. Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal s prilozheniem [Guide. Engineering Journal with appendix]. 2018. № S1. P. 9–18. DOI: 10.14489/hb.suppl.2018.01.

4. Lomakin E. V. Kruchenie tsilindricheskikh tel s izmenyayushchimisya deformatsionnymi svoystvami [Torsion of cylindrical bodies with varying strain properties]. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solid State]. 2008. № 3. P. 217–226.

5. Lomakin E. V., Shchendirgina O. P. Napryazheniya i deformatsii v diske iz fizicheskii nelineynogo materiala s zavisyashchimi ot vida napryazhennogo sostoyaniya svoystvami [Stresses and strains in a disc made of a physically nonlinear material with properties dependent on the type of stress state]. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solid State]. 2020. № 4. P. 25–33. DOI:10.31857/S0572329920040091.

6. Cazacu O., Stewart J. Analytic plastic potential for porous aggregates with matrix exhibiting tension-compression asymmetry // J. Mech. Phys. Solids. 2009. V. 57. P. 325–341.

7. Pietruszczak S., Mroz Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor // Comput. Geotech. 2000. V. 26. P. 105–112.

8. Gao Z., Zhao J., Yao Y. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials // Int. J. Solid Struct. 2010. V. 47. P. 3166–3185.

9. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 2003. V. 51. P. 1477–1508.

10. McFarland A.W., Colton, J.S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // J. Micromech. Microeng. 2005. V. 15. P. 1060–1067.

11. Panov S. I., Goldin A. L. Deformatsii glinistykh gruntov pri tsiklicheskom nagruzhении [Deformation of clay soils with cyclic loading] / Izvestiya Vserossiyskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta gidrotekhniki im. B.E. Vedeneeva [News of the All-Russian Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering named after B.E. Vedeneev]. 2016. № 280. P. 79–86.

12. Protosenya A. G. Fizicheski nelineyno-plasticheskaya zadacha o raspredelenii napryazheniy vokrug vyrabotki krugovogo ochertaniya [Physically nonlinear-plastic problem of stress distribution around the circular outline of a working] / Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy zhurnal [News of higher educational institutions. Mining Magazine]. 2014. № 2. P. 43–48.

13. Astapov Yu.V. Konechnye deformatsii ortotropnogo tsilindra pri nagruzhении vnutrennim davleniem [Finite deformations of an orthotropic cylinder under loading by internal pressure] / Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyye nauki. [News of Tula State University. Natural Sciences]. 2015. № 4. P. 113–118.

14. Magdeev U. Kh., Morozov V. I., Pukhareno Yu. V. K matematicheskoy postanovke zadachi ob opredelenii osesimmetrichnykh deformatsiy konstruktivnykh iz neodnorodno ortotropnykh materialov [About setting up a mathematical problem of determining the axisymmetric deformations in designs made of heterogeneous orthotropic materials]. / Fundamentalnye, poiskovyye i prikladnyye issledovaniya RAASN po nauchnomu obespecheniyu razvitiya arhitektury, gradostroitelstva i stroitel'noy otrasli RF v 2016 g. : sbor. nauch. tr. RAASN. [Fundamental, exploratory and applied research of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences on scientific support for the development of architecture, urban planning and the construction industry of the RF in 2016. Scientific works of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences]. Moscow, RAASN. 2017. P. 227–230. DOI:10.22337/9785432302212.

15. Gotsev D. V., Kovalev A. V., Yakovlev A. Yu. Napryazhennoe sostoyanie neogranichennogo prostranstva vblizi tsilindricheskoy polosti s nekrugovoy formoy poperechnogo secheniya dlya stareyushchih uprugovyazkoplasticheskikh materialov [Stress state of unlimited space near a cylindrical cavity with a non-circular cross-sectional shape for aging



elasto-viscoplastic materials] / *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 2020. № 6. P. 34–140. DOI:10.31857/S0572329920060082.

16. Lyapichev Y. P. Vybor matematicheskikh modeley gruntov v staticheskikh i seismicheskikh raschetah gruntovykh plotin [Choice of mathematic models of soils in static and seismic analyses of embankment dams] / *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2020. Vol.16. № 4. P. 261–270. DOI:10.22363/1815-5235.

17. Benz T. Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences // Stuttgart. 2007. 193 p. 226.

18. Schanz T., Vermeer P.A., Bonnier P.G. The hardening soil model: Formulation and verification // *In beyond 200 in Computational Geotechnics*. 1999, P. 281–296.

19. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalised stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Eng. Plasticity*. Cambridge Univ. Press, 1968. P. 585–609.

20. Starov A.V. Plasticheskoe deformirovanie kruglykh platinok s zhestkim zashchemleniem kraya pri lokalnom nagruzhении [Plastic deformation of circular plates with rigid fixing of the edge at local loading] / *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering Series: Civil Engineering and Architecture]. 2013. № 34(53). P. 99–106.

21. Bakushev S.V. Approksimatsiya diagramm deformirovaniya bilineynymi funktsiyami [Approximations of warp diagrams using bilinear functions. Structural mechanics and analysis of constructions] / *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and structural design]. 2019. № 2(283). P. 2–11.

22. Bakushev S.V. Differentsialnye uravneniya ravnovesiya osesimmetrichnoy deformatsii idealno uprugoplasticheskogo elementa konstruktсии pri sloznom napryazhyoennom sostoyanii [Differential equations of equilibrium for the axially symmetric deformation of an ideally elasto-plastic structural element in complex stress state] / *Regional'naya arhitektura i stroitel'stvo* [Regional architecture and construction]. 2020. № 1(42). P. 140–155.

23. Bakushev S.V. Approksimatsiya diagramm deformirovaniya kvadraticnymi funktsiyami [Approximation of deformation diagrams by quadratic functions. Structural mechanics and analysis of constructions]. 2020. № 3(290). P. 2–14.

© С. В. Бакушев, 2024

Получено: 24.02.2024 г.