



УДК 534.1

В. И. ЕРОФЕЕВ, д-р физ.-мат. наук, проф., директор; **Н. И. МОЛОДУШНАЯ**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; **Е. А. НИКИТИНА**, канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник

ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВЫХ И ДИФфуЗИОННЫХ ПОТОКОВ

Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова–Грехова Российской академии наук».

Россия, 603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85.

Тел.: (831) 432-03-00; эл. почта: erof.vi@yandex.ru; united-friends@bk.ru; nikitina.ea.nn@gmail.com

Ключевые слова: балка Бернулли-Эйлера, термомеханодиффузия, изгибные волны, дисперсия, частота, фазовая скорость, групповая скорость, «эффект обратной волны».

В статье представлены результаты исследования влияния релаксации тепловых и диффузионных потоков, происходящей в материале балки, на дисперсионные характеристики распространяющихся по ней изгибных волн. Получены аналитические выражения для частоты волны, фазовой и групповой скоростей. Показано, что фазовая и групповая скорости могут иметь противоположные знаки («эффект обратной волны»). Приведен расчетный пример для случая, когда материал балки является двухкомпонентной средой из дюралюминия.

Введение

В настоящее время существует много моделей, обобщающих классическую модель термомеханодиффузии. В публикациях [1, 2] исследуется модель нестационарных термомеханодиффузионных колебаний балки, основанная на гипотезах Бернулли-Эйлера, и предлагается метод решения, основанный на использовании преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье. Напомним, что в классической теории Я. Бернулли и Л. Эйлера предполагается, что: 1) поперечные сечения балки, плоские и перпендикулярные оси балки до деформации, во время изгиба остаются плоскими и перпендикулярными ее деформированной оси; 2) нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, пренебрежимо малы, т. е. продольные сечения сопротивляются изгибу независимо, не оказывая друг на друга влияния; 3) инерцией вращения элемента балки при изгибе пренебрегается [3, 4].

Данная работа посвящена исследованию дисперсионных свойств балки Бернулли-Эйлера с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается задача о распространении изгибных волн в балке Бернулли-Эйлера с учетом тепломассопереноса [1, 2, 5, 6]. Балка считается бесконечной и выполненной из однородного материала [1].

Сформулированная задача описывается системой дифференциальных уравнений [1]:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + a \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + b_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \alpha_1^1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} &= 0, \\
\tau_0^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + v^1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \tau^2} - \aleph_1^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0, \\
\tau_1^1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \tau^2} - D_1^1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} - \Lambda_{11}^1 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - M_1^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0
\end{aligned} \quad (1)$$

В (1) введены обозначения: $V(x, \tau)$ – поперечное перемещение балки; $\Theta(x, \tau)$ – температура; $H(x, \tau)$ – масса; $a = \frac{F}{J_3}$, где F – площадь сечения; J_3 – момент инерции балки относительно оси Ox ; $b_1, \alpha_1^1, \tau_0^1, v^1, \aleph_1^1, \tau_1^1, D_1^1, \Lambda_{11}^1, M_1^1$ – безразмерные величины. Описание безразмерных величин представлено в Приложении А.

Для исследования дисперсионных свойств системы (1) представим искомые функции $V(x, \tau), \Theta(x, \tau), H(x, \tau)$ в комплексной форме гармонических волн [7]:

$$V = V_0 e^{i(\omega\tau - kx)}, \Theta = \Theta_0 e^{i(\omega\tau - kx)}, H = H_0 e^{i(\omega\tau - kx)} \quad (2)$$

Подставляя соотношения (2) в (1), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
V_0 k^4 - a V_0 \omega^2 - b_1 \Theta_0 k^2 - \alpha_1^1 H_0 k^2 &= 0 \\
\aleph_1^1 \Theta_0 k^2 - \tau_0^1 \omega^2 - \tau_0^1 v^1 H_0 \omega^2 &= 0 \\
\tau_1^1 H_0 \omega^2 - D_1^1 H_0 k^2 + \Lambda_{11}^1 V_0 k^4 - M_1^1 \Theta_0 k^2 &= 0
\end{aligned} \quad (3)$$

Приравнявая к нулю детерминант системы (3) (Приложение Б), получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}
(k^4 - a\omega^2)(\aleph_1^1 k^2 - \tau_0^1 \omega^2)(\tau_1^1 \omega^2 - D_1^1 k^2) + \Lambda_{11}^1 b_1 k^6 \tau_0^1 v^1 \omega^2 + \\
+ \Lambda_{11}^1 \alpha_1^1 k^6 (\aleph_1^1 k^2 - \tau_0^1 \omega^2) - (k^4 - a\omega^2) \tau_0^1 v^1 \omega^2 M_1^1 k^2 = 0
\end{aligned} \quad (4)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\omega^2 = t \\
t^3 + \left(-\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1^1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right) t^2 + \\
+ \left(\frac{D_1^1 k^6}{a \tau_1^1} + \frac{\aleph_1^1 k^6}{a \tau_0^1} + \frac{\aleph_1^1 D_1^1 k^4}{\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{\Lambda_{11}^1 b_1 v^1 k^6}{a \tau_1^1} - \frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1 k^6}{a \tau_1^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^6}{a \tau_1^1} \right) t + \\
+ \left(\frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1 \aleph_1^1}{a \tau_0^1 \tau_1^1} - \frac{\aleph_1^1 D_1^1}{a \tau_0^1 \tau_1^1} \right) k^8 = 0
\end{aligned} \quad (5)$$

Подробное решение уравнения (5) представлено в Приложении В. Отсюда частота будет представлена в виде:



$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3} = \\
 &= \sqrt[3]{-\frac{2k^{12}}{27a^3} + \frac{Jk^{10} + Wk^8 + Fk^6}{2}} + \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Ek^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}} + \\
 &= \sqrt[3]{-\frac{2k^{12}}{27a^3} + \frac{Jk^{10} + Wk^8 + Fk^6}{2}} - \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Ek^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}} - \frac{\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3} \quad (6) \\
 \omega_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + i \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2} \sqrt{3} - \frac{\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3} \\
 \omega_3 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - i \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2} \sqrt{3} - \frac{\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3}
 \end{aligned}$$

Из (6) видно, что частота является комплексной $\omega = \omega' + i\omega''$, где $\omega' = \text{Re}(\omega)$ – действительная часть частоты, $\omega'' = \text{Im}(\omega)$ – мнимая часть частоты. Аналитический вид действительной и мнимой частей частоты, а также принятые в (6) обозначения, представлены в Приложении Г.

Качественный вид дисперсионных зависимостей приведен на рис. 1, 2:

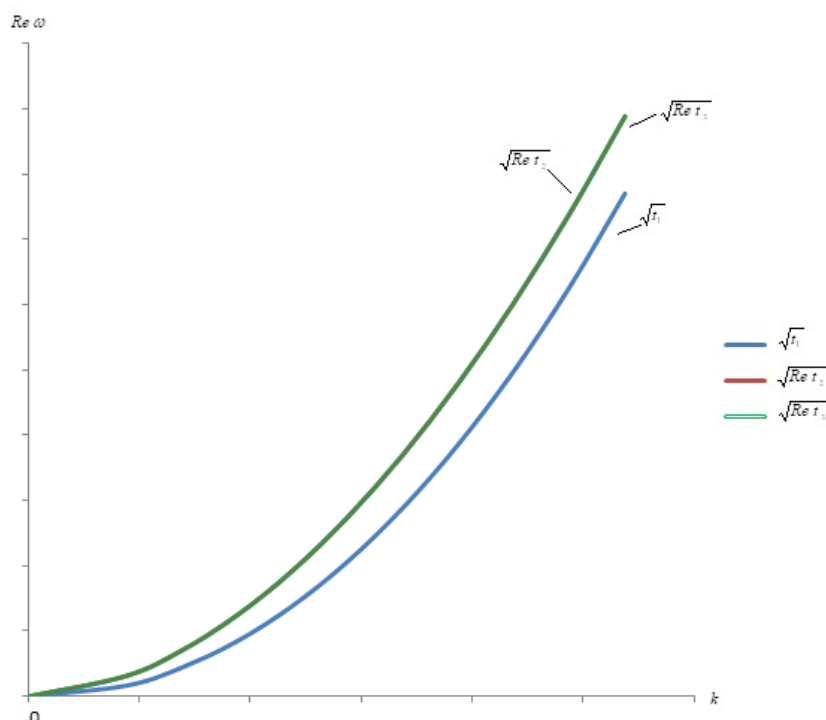


Рис. 1. Зависимость действительной части частоты от волнового числа

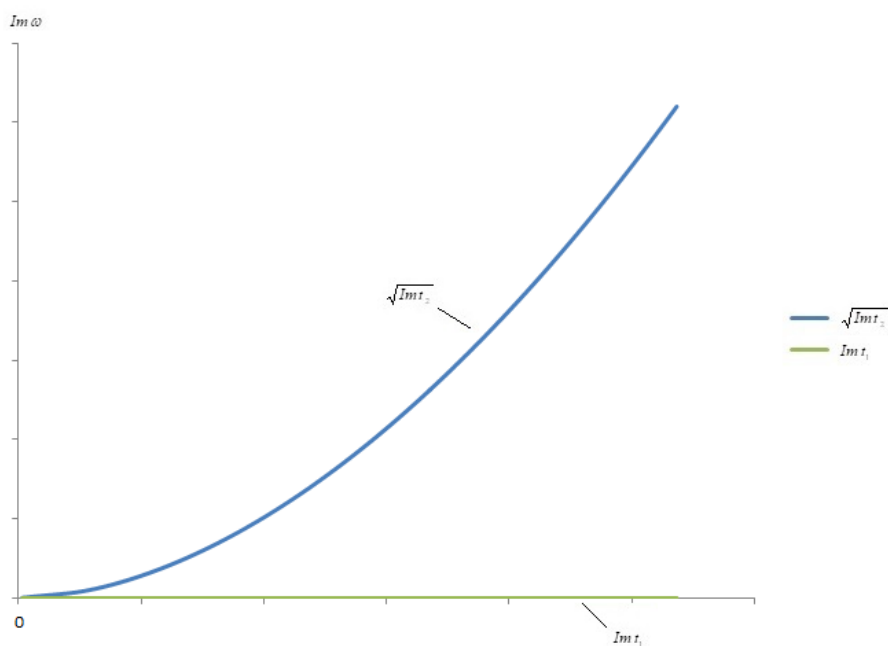


Рис. 2. Зависимость мнимой части частоты от волнового числа

Аналитический вид фазовых и групповых скоростей [8] представлен в Приложении Д.

На рис. 3 представлена зависимость фазовой скорости от волнового числа:

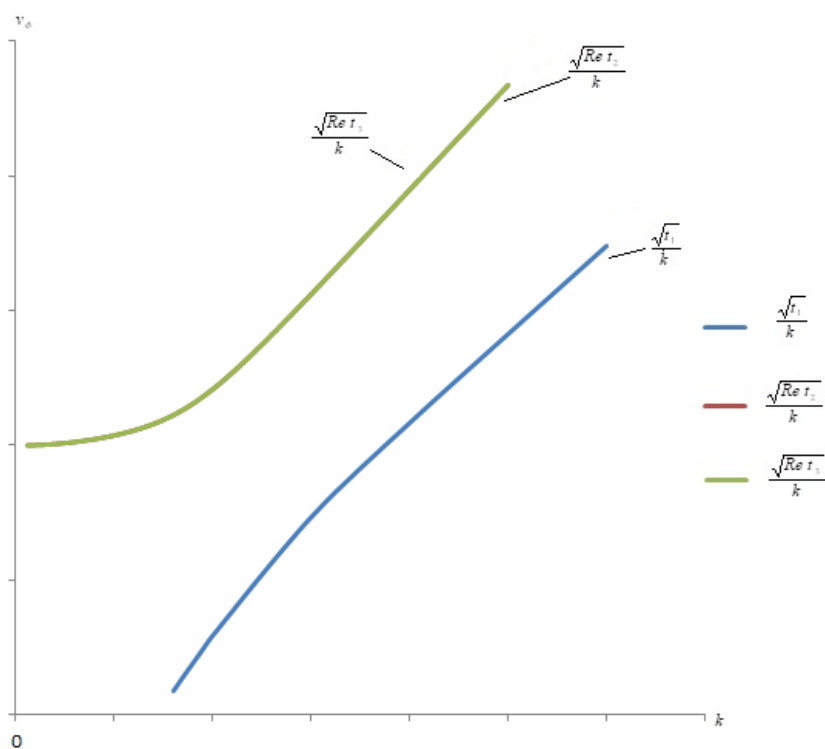


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от волнового числа

На рис. 4 представлена зависимость групповой скорости от волнового числа:

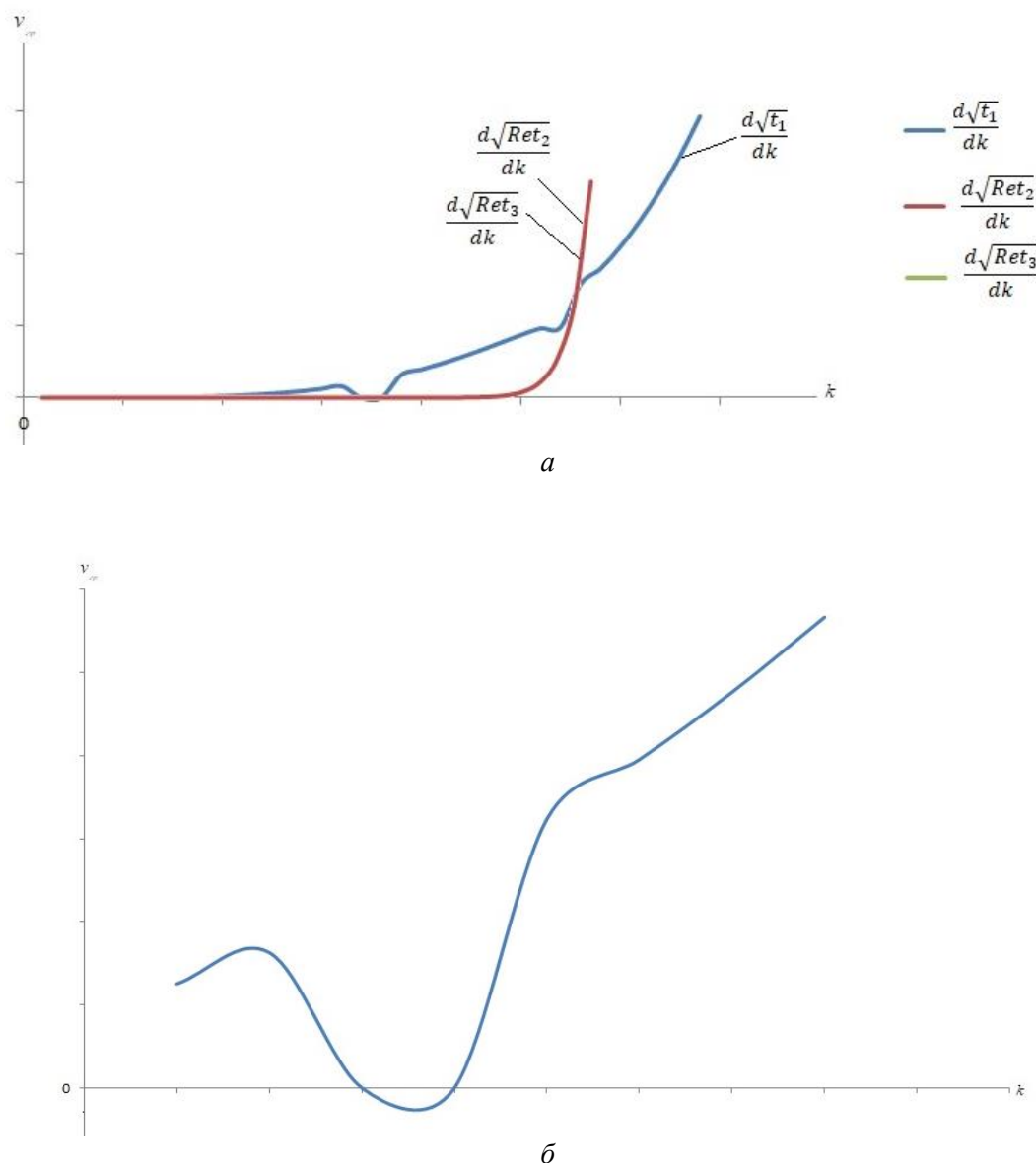


Рис. 4. Зависимость групповой скорости от волнового числа

Обратим внимание, что на рис. 3 и 4 представлены противоположные направления фазовой и групповой скоростей в балке. Такая ситуация называется «эффектом обратной волны» и описывается в статьях [9, 10] и книге [8].

2. Пример

Если при построении графиков взять за основу дюралюминий 2024 [1, 11], безразмерные величины будут равны:

$$M_1^1 = -7.24 * 10^{-4}$$

$$\Lambda_{11}^1 = 8.91 * 10^{-15}$$

$$D_1^1 = 3.29 * 10^{-15}$$

$$\alpha_1^1 = 4.41 * 10^{-6}$$

$$\aleph_1^1 = 9.65 * 10^{-6}$$

$$b_1^1 = 1.38 * 10^{-2}$$

$$a = 4.8 * 10^7$$

$$\tau_0^1 = 6.37 * 10^{-2}$$

$$\tau_1^1 = 1.27 * 10^5$$

$$T_0 = 600K$$

$$v^1 = -7.12$$

Качественный вид дисперсионных зависимостей приведен на рис. 5–8:

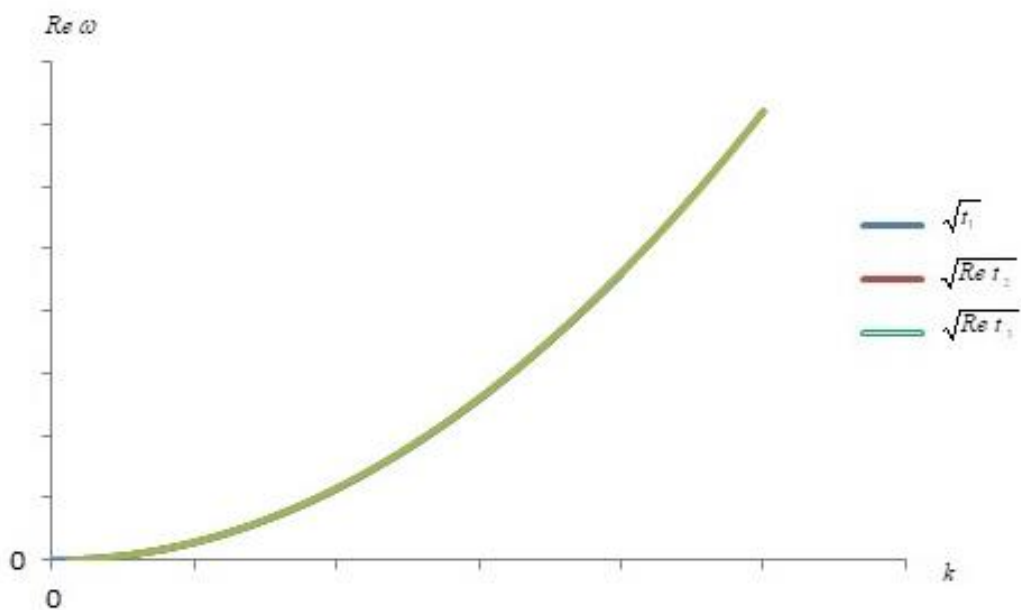


Рис. 5. Зависимость действительной части частоты от волнового числа

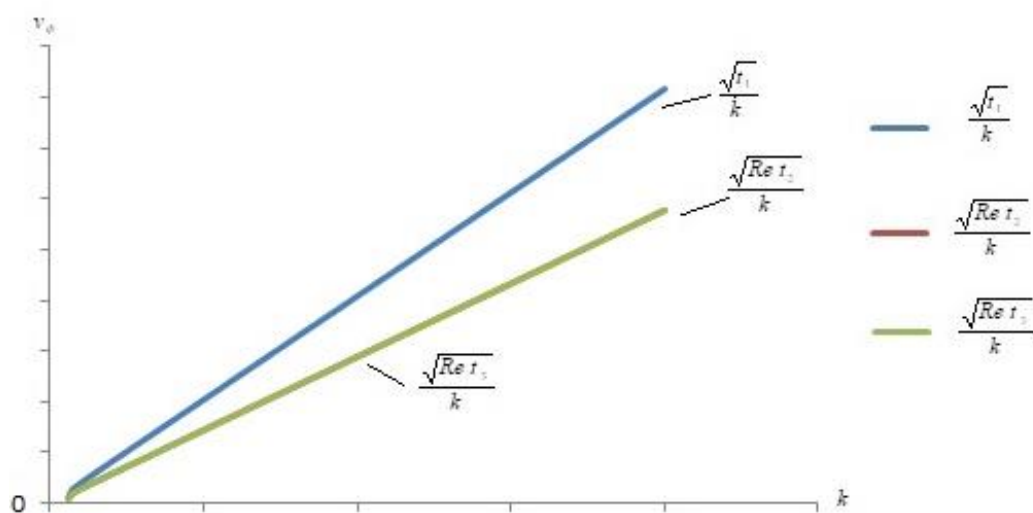


Рис. 6. Зависимость фазовой скорости от волнового числа

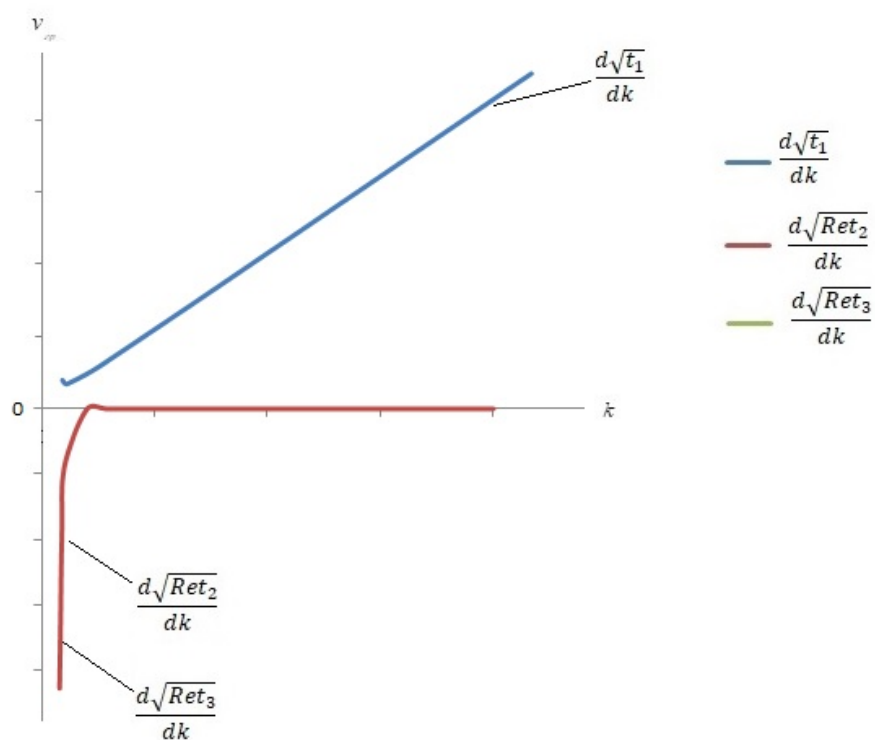


Рис. 7. Зависимость групповой скорости от волнового числа



Рис. 8. Зависимость мнимой части частоты от волнового числа

Заключение

Проведенное исследование показало, что учет тепловых и диффузионных потоков в материале балки приводит к затуханию диспергирующей изгибной волны, зависящему от длины волны. Кроме того, выбранная модель позволяет описать «эффект обратной волны» [10], при котором, несмотря на то, что фазовая скорость направлена в положительном направлении оси x , энергия в такой волне переносится в отрицательном направлении.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF-2024-0031, № НИОКТР 1023032800130-3-2.3.2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Земсков, А. В. Нестационарные термоупругодиффузионные колебания балки Бернулли-Эйлера под воздействием распределенной поперечной нагрузки / А. В. Земсков, Ле Ван Хао // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 3. – С. 75–85.
2. Земсков, А. В. Модель нестационарного изгиба балки Бернулли-Эйлера с учетом тепломассопереноса / А. В. Земсков, Ле Ван Хао // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием, Москва, 23–25 ноября 2021. – Москва : Сам Полиграфист, 2021. – С. 280–289.
3. Вибрации в технике : справочник. В 6 томах. Том 1. Колебания линейных систем. – 2-е изд., испр. и доп. / под редакцией В. В. Болотина. – Москва : Машиностроение, 1999. – 504 с. : ил. – ISBN 5-217-02898-X.
4. Весницкий, А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками / А. И. Весницкий. – Москва : Физматлит, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0172-2.
5. Ле Ван Хао. Моделирование нестационарных термодиффузионных колебаний балки Бернулли-Эйлера : специальность 1.1.8 : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Ле Ван Хао ; [Место защиты: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)]. – Москва, 2025. – 112 с.



6. Давыдов, С. А. Анализ напряженно-деформированного состояния упругих сред с учетом тепломассопереноса: специальность 01.02.04 : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Давыдов Сергей Андреевич ; [Место защиты : Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)]. – Москва, 2020. – 120 с.

7. Ерофеев, В. И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Н. П. Семерикова. – Москва : Физматлит, 2002. – 208 с. – ISBN 5-9221-0294- X.

8. Гринченко, В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев : Наукова думка, 1981. – 284 с.

9. Сравнительный анализ динамического поведения балок моделей Бернулли-Эйлера, Рэлея и Тимошенко, лежащих на упругом основании / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Е. Е. Лисенкова, Н. П. Семерикова // Вестник научно-технического развития. – Москва, 2009. – № 8 (24). – С. 18–26.

10. Макаров, В. П. Об электромагнитных волнах с отрицательной групповой скоростью / В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, А. А. Самохин // Прикладная физика. – 2009. – № 4. – С. 19–30.

11. Физические величины: справочник / А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский [и др.] ; под редакцией И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – Москва : Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с. – ISBN 5-283-04013-5.

EROFEEV Vladimir Ivanovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, director; MOLODUSHNAYA Natalia Igorevna, candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher; NIKITINA Elena Aleksandrovna, candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher

DISPERSION CHARACTERISTICS OF FLEXURAL WAVES IN A BERNOULLI-EULER BEAM WITH ACCOUNT FOR RELAXATION OF THERMAL AND DIFFUSION FLUXES

Mechanical Engineering Research Institute of RAS – branch of Federal Research Center A. V. Gaponov–Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences.

85, Belinskogo St., Nizhny Novgorod, 603024, Russia.

Tel.: (831) 432-03-00; e-mail: erof.vi@yandex.ru; united-friends@bk.ru; nikitina.ea.nn@gmail.com

Key words: Bernoulli-Euler beam, thermomechanical diffusion, flexural waves, dispersion, frequency, phase velocity, group velocity, "backward wave effect."

This article presents the results of a study examining the influence of thermal and diffusion flux relaxation in a beam material on the dispersion characteristics of flexural waves propagating within it. Analytical expressions are derived for the wave frequency, phase velocity, and group velocity. It is shown that the phase and group velocities can have opposite signs (the "backward wave effect"). A calculation example is provided for a beam material consisting of a two-component medium made of duralumin.

REFERENCES

1. Zemskov A. V., Hao Le Van. Nestatsionarnyye termouprugodiffuzionnyye kolebaniya balki Bernulli-Eйлера pod vozdeystviyem raspredelennoy poperechnoy nagruzki [Unsteady thermoelastic diffusion vibrations of the Bernoulli-Euler beam under the action of a distributed



transverse load]. Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2023, № 3, P. 75–85.

2. Zemskov A. V., Hao Le Van. Model nestatsionarnogo izgiba balki Bernulli-Eylera s uchetom teplomassoperenosa [Model of unsteady bending of a Bernoulli-Euler beam taking into account heat and mass transfer]. Mekhanika kompozitsionnikh materialov i konstruktsey, slozhnikh i geterogennikh sred [Mechanics of Composite Materials and Structures, Complex and Heterogeneous Media]: sbornik trudov 11 Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhduнародnim uchastiem, 23–25 noyabrya 2021. Moscow, Sam Poligrafist, 2021, P. 280–289.

3. Vibratsii v tekhnike [Vibrations in Engineering]: spravochnik. V 6-ti tomakh. Kolebaniya lineynykh system [Oscillations of Linear Systems]. 2-ye izd., ispr. i dop. pod red. Bolotina V.V. Vol. 1, Moscow, Mashinostroenie, 1999, 504 p.: ill. ISBN 5-217-02898-X.

4. Vesnitsky A. I. Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami [Waves in systems with moving boundaries and loads]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 320 p. ISBN 5-9221-0172-2.

5. Hao Le Van. Modelirovaniye nestatsionarnykh termodiffuzionnykh kolebaniy balki Bernulli-Eylera [Modeling of non-stationary thermal diffusion oscillations of a Bernoulli-Euler beam] : spetsialnost 1.1.8: diss. ... kand. fiziko-matematicheskikh nauk. Moscow, Moskovskiy aviatsionnyy institut, 2025, 112 p.

6. Davydov S. A. Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh sred s uchotom teplomassoperenosa [Analysis of the stress-strain state of elastic media taking into account heat and mass transfer] : spetsialnost 01.02.04 : diss. ... kand. fiziko-matematicheskikh nauk. Moscow, Moskovskiy aviatsionnyy institut, 2020, 120 p.

7. Erofeev V. I., Kazhaev V. V., Semerikova N. P. Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow, Fizmatlit, 2002, 208 p. ISBN 5-9221-0294-X.

8. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Garmonicheskkiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Kiev, Naukova dumka, 1981, 284 p.

9. Erofeev V. I., Kazhaev V. V., Lisenkova E. E., Semerikova N. P. Sravnitelnyy analiz dinamicheskogo povedeniya balok modeley Bernulli-Eylera, Releya i Timoshenko, lezhashchikh na uprugom osnovanii [Comparative analysis of the dynamic behavior of beams of the Bernoulli-Euler, Rayleigh and Timoshenko models lying on an elastic foundation]. Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya [Bulletin of science and Technical Development]. 2009, № 8 (24), P. 18–26.

10. Makarov V. P., Rukhadze A. A., Samokhin A. A. Ob elektromagnitnykh volnakh s otritsatelnoy gruppovoy skorostyu [On electromagnetic waves with negative group velocity]. Prikladnaya fizika [Applied Physics]. 2009, № 4, P.19–30.

11. Babichev A. P., Babushkina N. A., Bratkovsky A. M. [et al.]. Fizicheskiye velichiny: spravochnik [Physical quantities: a handbook]. pod red. Grigoryeva I. S., Meylikhova Ye. Z. Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 p. ISBN 5-283-04013-5.

© В. И. Ерофеев, Н. И. Молодушная, Е. А. Никитина, 2026

Получено: 08.04.2026 г.



ПРИЛОЖЕНИЯ К СТАТЬЕ
В. И. ЕРОФЕЕВА, Н. И. МОЛОДУШНОЙ, Е. А. НИКИТИНОЙ
«ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН
В БАЛКЕ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВЫХ
И ДИФФУЗИОННЫХ ПОТОКОВ»

Приложение А – безразмерные величины

$$b_1 = \frac{b_1^* T_0}{C_{1111}}, \alpha_1^1 = \frac{\alpha_1^*}{C_{1111}}, \tau_0^1 = \frac{C \tau_T}{l}, v^1 = \frac{v^*}{\rho c_0 T_0}, \aleph_1^* = \frac{\aleph_1^*}{\rho c_0 C l}$$

$$\tau_1^1 = \frac{C \tau^1}{l}, D_1^1 = \frac{D_1^*}{C l}, \Lambda_{11}^1 = \frac{\Lambda_{11}^*}{C l}, M_1^1 = \frac{M_1^*}{T_0}.$$

$$v^{1*} = \rho R T_0 \frac{\ln[n_0^1 \gamma^1]}{m^1}, M_1^{1*} = n_0^1 D_1^{1*} \ln[n_0^1 \gamma^1],$$

$$\Lambda_{11}^{1*} = \frac{m^1 D_1^{1*} \alpha_1^* n_0^1}{\rho R T_0}$$

Здесь T_0 – начальная температура среды; b_1^* – температурный коэффициент, характеризующий деформации за счет нагрева; D_1^{1*} – коэффициент диффузии; ρ – плотность; c_0 – удельная теплоемкость; C – скорость волны растяжения-сжатия в упругой среде; l – длина балки; C_{1111} – компоненты тензора упругих постоянных; α_1^* – коэффициент, характеризующий объемное изменение среды за счет диффузии; τ_T и τ^1 – времена релаксации тепловых и диффузионных потоков; n_0^1 – начальная концентрация q -го вещества; γ^1 – коэффициент активности; $\aleph_1^*$ – компонента тензора теплопроводности; m^1 – полярная масса q -го вещества; R – газовая постоянная.

Приложение Б – решение системы (3)

Для решения применяем метод Саррюса. Детерминант системы (3):

$$\begin{vmatrix} V_0 & \Theta_0 & H_0 \\ k^4 - a\omega^2 & -b_1 k^2 & -\alpha_1^1 k^2 \\ 0 & \aleph_1^1 k^2 - \tau_0^1 \omega^2 & -\tau_0^1 v^1 \omega^2 \\ \Lambda_{11}^1 k^4 & -M_1^1 k^2 & \tau_1^1 \omega^2 - D_1^1 k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Б.1})$$

После преобразований:

$$a \tau_0^1 \tau_1^1 \omega^6 + (-\tau_0^1 \tau_1^1 k^4 - a \tau_0^1 D_1^1 k^2 - a \aleph_1^1 \tau_1^1 k^2 + a \tau_0^1 v^1 M_1^1 k^2) \omega^4 +$$

$$+ \left(\tau_0^1 D_1^1 k^6 + \aleph_1^1 \tau_1^1 k^6 + a \aleph_1^1 D_1^1 k^4 + \Lambda_{11}^1 b_1 \tau_0^1 v^1 k^6 - \right. \\ \left. - \Lambda_{11}^1 \alpha_1^1 \tau_0^1 k^6 - \tau_0^1 v^1 M_1^1 k^6 \right) \omega^2 +$$

$$+ (\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1 \aleph_1^1 - \aleph_1^1 D_1^1) k^8 = 0 \quad (\text{Б.2})$$

Приложение В – решение уравнения (5)

Для решения уравнения (5) применена формула Кордано:

$$\begin{aligned} p &= \left(-\frac{D_1^1}{a\tau_1^1} - \frac{\aleph_1}{a\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1}{a\tau_1^1} - \frac{\Lambda_{11}^1 b_1 v^1}{3a\tau_1^1} + \frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1}{3a\tau_1^1} \right) k^6 - \frac{k^8}{3a} + \\ &+ \left(-\frac{D_1^{12}}{3\tau_1^{12}} - \frac{\aleph_1 D_1^1}{\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{2v^1 M_1^1 D_1^1}{3\tau_1^{12}} - \frac{\aleph_1^2}{3\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{2\aleph_1 v^1 M_1^1}{3\tau_0^1 \tau_1^1} - \frac{v^{12} M_1^{12}}{3\tau_1^{12}} \right) k^4 = \\ &= Ak^6 - \frac{k^8}{3a} + Bk^4 \\ q &= -\frac{2k^{12}}{27a^3} + \left(-\frac{D_1^1}{9a^2 \tau_1^1} - \frac{\aleph_1}{9a^2 \tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1}{9a^2 \tau_1^1} + \frac{\Lambda_{11}^1 b_1 v^1}{3a^2 \tau_1^1} - \frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1}{3a^2 \tau_1^1} \right) k^{10} + \\ &+ \left(\frac{D_1^1}{9a\tau_1^{12}} + \frac{4\aleph_1 D_1^1}{9a\tau_0^1 \tau_1^1} - \frac{v^1 D_1^1 M_1^1}{9a^2 \tau_1^{12}} + \frac{5\aleph_1^2}{27a\tau_0^{12}} - \right. \\ &\left. - \frac{2\aleph_1 v^1 M_1^1}{9a\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{v^{12} M_1^1}{9a\tau_1^{12}} - \frac{\Lambda_{11}^1 \aleph_1 b_1 v^1}{a\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{2\Lambda_{11}^1 \aleph_1 \alpha_1^1}{3a\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{\Lambda_{11}^1 b_1 v^{12} M_1^1}{a\tau_1^{12}} - \frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1 v^{12} M_1^1}{a\tau_1^{12}} \right) k^8 + \\ &+ \left(-\frac{2D_1^{13}}{27\tau_1^{13}} + \frac{\aleph_1 D_1^{12}}{9\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{\aleph_1^2 D_1^1}{9\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{\aleph_1 v^1 M_1^1 D_1^1}{9\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{2D_1^{12} v^1 M_1^1}{9\tau_1^{13}} - \right. \\ &\left. - \frac{2D_1^{12} v^{12} M_1^{12}}{9\tau_1^{13}} - \frac{\aleph_1^3}{\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{2\aleph_1^2 v^1 M_1^1}{\tau_0^1 \tau_1^1} - \frac{\aleph_1 v^{12} M_1^{12}}{\tau_1^{12}} + \frac{\aleph_1^2 v^1 M_1^1}{\tau_0^1 \tau_1^{12}} - \frac{2\aleph_1 v^{12} M_1^{12}}{\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{v^{13} M_1^{13}}{\tau_1^{13}} \right) k^6 = \\ &= -\frac{2k^{12}}{27a^3} + Jk^{10} + Wk^8 + Fk^6 \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \\ Q &= k^{22} \left\{ \frac{1}{243a^4} A - \frac{1}{27a^3} J \right\} + k^{20} \left\{ \frac{1}{243a^4} B - \frac{1}{81a^2} A^2 + \frac{1}{4} J^2 - \frac{1}{54a^3} W \right\} + \\ &+ k^{18} \left\{ \frac{1}{27} A^3 + \frac{1}{2} \left(JW - \frac{2}{27a^3} F \right) \right\} + k^{16} \left\{ \frac{1}{27} A^2 B - \frac{1}{81a^2} B^2 + \frac{3}{4} JF \right\} + \\ &+ k^{14} \left\{ \frac{1}{27} AB^2 + \frac{1}{4} FW \right\} + k^{12} \left\{ \frac{1}{27} B^3 + \frac{1}{4} F^2 \right\} \end{aligned} \quad (B.2)$$



здесь:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{D_1^1}{a\tau_1^1} - \frac{\aleph_1}{a\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1}{a\tau_1^1} - \frac{\Lambda_{11}^1 b_1 v^1}{3a\tau_1^1} + \frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1}{3a\tau_1^1} \\
 B &= -\frac{D_1^{12}}{3\tau_1^{12}} - \frac{\aleph_1 D_1^1}{\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{2}{3} \frac{v^1 M_1^1 D_1^1}{\tau_1^{12}} - \frac{\aleph_1^2}{3\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{2}{3} \frac{\aleph_1 v^1 M_1^1}{\tau_0^1 \tau_1^1} - \frac{v^{12} M_1^{12}}{3\tau_1^{12}} \\
 J &= -\frac{D_1^1}{9a^2 \tau_1^1} - \frac{\aleph_1}{9a^2 \tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1}{9a^2 \tau_1^1} + \frac{\Lambda_{11}^1 b_1 v^1}{3a^2 \tau_1^1} - \frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1}{3a^2 \tau_1^1} \\
 W &= \frac{D_1^1}{9a\tau_1^{12}} + \frac{4\aleph_1 D_1^1}{9a\tau_0^1 \tau_1^1} - \frac{v^1 D_1^1 M_1^1}{9a^2 \tau_1^{12}} + \frac{5\aleph_1^2}{27a\tau_0^{12}} - \\
 &\quad - \frac{2\aleph_1 v^1 M_1^1}{9a\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{v^{12} M_1^1}{9a\tau_1^{12}} - \frac{\Lambda_{11}^1 \aleph_1 b_1 v^1}{a\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{2\Lambda_{11}^1 \aleph_1 \alpha_1^1}{3a\tau_0^1 \tau_1^1} + \frac{\Lambda_{11}^1 b_1 v^{12} M_1^1}{a\tau_1^{12}} - \frac{\Lambda_{11}^1 \alpha_1^1 v^{12} M_1^1}{a\tau_1^{12}} \\
 F &= -\frac{2D_1^{13}}{27\tau_1^{13}} + \frac{\aleph_1 D_1^{12}}{9\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{\aleph_1^2 D_1^1}{9\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{\aleph_1 v^1 M_1^1 D_1^1}{9\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{2D_1^{12} v^1 M_1^1}{9\tau_1^{13}} - \\
 &\quad - \frac{2D_1^1 v^{12} M_1^{12}}{9\tau_1^{13}} - \frac{\aleph_1^3}{\tau_0^{12} \tau_1^1} + \frac{2\aleph_1^2 v^1 M_1^1}{\tau_0^{12} \tau_1^1} - \frac{\aleph_1 v^{12} M_1^{12}}{\tau_1^{12}} + \\
 &\quad + \frac{\aleph_1^2 v^1 M_1^1}{\tau_0^1 \tau_1^{12}} - \frac{2\aleph_1 v^{12} M_1^{12}}{\tau_0^1 \tau_1^{12}} + \frac{v^{13} M_1^{13}}{\tau_1^{13}}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Таким образом, t :

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3} \\
 t_2 &= -\frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2} + i \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2} \sqrt{3} - \\
 &\quad - \frac{\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3} \\
 t_3 &= -\frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2} - i \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2} \sqrt{3} - \\
 &\quad - \frac{\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$



Приложение Г – Комплексная частота (6)

Действительная и мнимая части частоты системы (6) представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 = & \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)^2}{9} + \frac{\left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\right)\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)}{3}} * \\ & * \cos \left[\frac{\arctg \left(\frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right)}{2} \right] \\ \omega_2 = & \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)^2}{9} + \frac{\left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\right)\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)}{3}} * \\ & * \sin \left[\frac{\arctg \left(\frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right)}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 = & \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)^2}{9} + \frac{\left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\right)\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)}{3}} * \\ & * \cos \left[\frac{\arctg \left(\frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right)}{2} \right] \\ \omega_3 = & - \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)^2}{9} + \frac{\left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\right)\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}\right)}{3}} * \\ & * \sin \left[\frac{\arctg \left(\frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right)}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.2)$$



Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \frac{1}{243a^4} A - \frac{1}{27a^3} J \right\}; G = \left\{ \frac{1}{243a^4} B - \frac{1}{81a^2} A^2 + \frac{1}{4} J^2 - \frac{1}{54a^3} W \right\}; \\ E &= \left\{ \frac{1}{27} A^3 + \frac{1}{2} \left(JW - \frac{2}{27a^3} F \right) \right\}; Z = \left\{ \frac{1}{27} A^2 B - \frac{1}{81a^2} B^2 + \frac{3}{4} JF \right\}; \\ R &= \left\{ \frac{1}{27} AB^2 + \frac{1}{4} FW \right\}; C = \left\{ \frac{1}{27} B^3 + \frac{1}{4} F^2 \right\} \end{aligned} \quad (\Gamma.3)$$

Приложение Д – фазовые и групповые скорости

Фазовые скорости имеют вид:

$$v_{\phi}^1 = \sqrt[3]{-\frac{2k^6}{27a^3} + Jk^4 + Wk^2 + F} + \sqrt{Pk^{10} + Gk^8 + Ek^6 + Zk^4 + Rk^2 + C} + \sqrt[3]{-\frac{2k^6}{27a^3} + Jk^4 + Wk^2 + F} - \sqrt{Pk^{10} + Gk^8 + Ek^6 + Zk^4 + Rk^2 + C} - \frac{k^2}{a} - \frac{D_1^1}{\tau_1^1} - \frac{\aleph_1^1}{\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1}{\tau_1^1} \quad (\text{Д.1})$$

$$v_{\phi}^{2,3} = \frac{1}{k^4} \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1^1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)^2}{9} + \frac{\left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1^1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)}{3}} + \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right) \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)} \right) * \cos \left(\frac{\arctg \left(\frac{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1^1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right)}{2} \right) \quad (\text{Д.2})$$

Групповые скорости имеют вид:

 $v'_{\varphi} =$

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{\frac{-\frac{2k^{12}}{27a^3} + Jk^{10} + Wk^8 + Fk^6}{2} + \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}}} + \\
& 6 \sqrt[3]{\frac{-\frac{2k^{12}}{27a^3} + Jk^{10} + Wk^8 + Fk^6}{2} - \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}}} - \\
& \left[\frac{-\frac{k^4}{a} - \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} - \frac{8k^2}{\tau_0^1} + \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1}}{3} \right] \\
& \left\{ 4k^3 + 2 \left(\frac{D_1^1}{\tau_1^1} + \frac{8}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1}{\tau_1^1} \right) k + \frac{k^{11} (11Pk^{10} + 10Gk^8 + 9Qk^6 + 8Zk^4 + 7Rk^2 + 6C) + \left(\frac{12}{27a^3} k^{11} - 5Jk^9 - 4Wk^7 - 3Fk^5 \right) \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}}}{\sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}}} \sqrt[3]{\frac{-\frac{2k^{12}}{27a^3} + Jk^{10} + Wk^8 + Fk^6}{2} + \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}}} + \right. \\
& \left. - k^{11} (11Pk^{10} + 10Gk^8 + 9Qk^6 + 8Zk^4 + 7Rk^2 + 6C) + \left(\frac{12}{27a^3} k^{11} - 5Jk^9 - 4Wk^7 - 3Fk^5 \right) \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}} \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}}}{\sqrt[3]{\frac{-\frac{2k^{12}}{27a^3} + Jk^{10} + Wk^8 + Fk^6}{2} - \sqrt{Pk^{22} + Gk^{20} + Qk^{18} + Zk^{16} + Rk^{14} + Ck^{12}}}} \right\} \quad (Д.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{\varphi}^{2,3} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{9} U^2 - \frac{1}{3} \left[U \left(\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + \left(\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right) \right] \right]^{\frac{3}{4}} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{2}{9} S(k^4 + k^2) - \frac{1}{3} \left[S \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \frac{U \left(\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right)}{3 \sqrt{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^2}} + S \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + \frac{U \left(-\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right)}{3 \sqrt{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^2}} + \frac{\frac{N}{\sqrt{Q}} + 2n}{3 \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}} + \frac{-\frac{N}{\sqrt{Q}} + 2n}{3 \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}} \left(\frac{\left(-\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right) \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}}{3 \sqrt{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^2}} + \frac{\left(\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right) \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{3 \sqrt{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^2}} \right) \right] \right] \cdot \\
& \cdot \cos \left[\frac{\arctg \left(\frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{8k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right)}{2} \right] \cdot \left[\frac{1}{9} U^2 - \frac{1}{3} \left[U \left(\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + \left(\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right) \right] \right]^{\frac{3}{4}} \cdot \\
& \cdot \sin \left[\frac{\arctg \left(\frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{8k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right)}{2} \right] \cdot \left[\frac{1}{2+2} \left(\frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{8k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \frac{\left[\sqrt{3} \left(3 \left(-\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{8k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right] + \frac{1}{\sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} - n \right] \right) - 3\sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) \left(2S + \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right] + \frac{1}{\sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} - n \right] \right) \right) \right]}{\left(3 \left(-\sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{8k^2}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right) \right)^2} \right] \quad (Д.4)
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
U &= \left(\frac{k^4}{a} + \left(\frac{D_1^1}{\tau_1^1} + \frac{8}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1}{\tau_1^1} \right) k^2 \right); S = \left(4 \frac{k^3}{a} + 2 \left(\frac{D_1^1}{\tau_1^1} + \frac{8}{\tau_0^1} - \frac{v^1 M_1^1}{\tau_1^1} \right) k \right) \\
N &= 22Pk^{21} + 20Gk^{19} + 18Qk^{17} + 16Zk^{15} + 14Rk^{13} + 12Ck^{11}; \\
n &= \frac{4}{9} k^{11} - 5Jk^9 - 4Wk^7 - 3Fk^5
\end{aligned} \quad (Д.5)$$

$$v_{\varphi}^{2,3} = \frac{1}{4} f^{\frac{3}{4}} f' \cos \left(\frac{\arctg(\Phi)}{2} \right) - f^{\frac{1}{4}} \sin \left(\frac{\arctg(\Phi)}{2} \right) \Psi \quad (Д.6)$$



$$f = \left\{ \frac{1}{9} U^2 - \frac{1}{3} \left[U \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right) \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)} \right] \right\} \quad (\text{Д.7})$$

$$f' = \left\{ \frac{2}{9} S(k^4 + k^2) - \frac{1}{3} \left[S \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \frac{U \left(\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right)}{3 \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^2}} + S \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + \frac{U \left(-\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right)}{3 \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^2}} + \frac{\frac{N}{\sqrt{Q}} + 2n}{3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}} + \frac{-\frac{N}{\sqrt{Q}} + 2n}{3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}} - \left\langle \frac{\left(-\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}}{3 \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^2}} + \frac{\left(\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{3 \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^2}} \right\rangle \right] \right\} \quad (\text{Д.8})$$

$$\Phi = \frac{3\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)}{3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right)} \quad (\text{Д.9})$$

$$\Psi = \left(\frac{1}{2 + 2(\Phi)} \right) \left\{ \frac{\Psi' \Psi''}{\Psi^*} \right\} \quad (\text{Д.10})$$

$$\Psi' = \sqrt{3} \left(3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right) \right)$$

$$\Psi'' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^2}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right] + \frac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^2}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} - n \right] \right) -$$

$$-3\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) *$$

$$* \left(2S + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q} \right)^2}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} + n \right] + \frac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q} \right)^2}} \left[\frac{N}{2\sqrt{Q}} - n \right] \right) \right)$$

$$\Psi^* = \left(3 \left(-\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right) + 2 \left(\frac{k^4}{a} + \frac{D_1^1 k^2}{\tau_1^1} + \frac{\aleph_1 k^2}{\tau_0^1} - \frac{\nu^1 M_1^1 k^2}{\tau_1^1} \right) \right)^2 \quad (\text{Д.12})$$