

УДК 624.072.2

В. В. БЕЛОВ¹, д-р техн. наук, гл. эксперт по строительной части;
А. Л. БАЛУШКИН², канд. техн. наук, доц. института инженеров
строительства и транспорта

РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ КРИТИЧЕСКОЙ НАКЛОННОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ЧАСТЬ I

¹АО «Атомэнергопроект».

Россия, 197183, Санкт-Петербург, ул. Савушкина, д. 82.

Тел.: (921) 920-24-01, эл. почта: VVBelov@spbaer.ru

²ФГБОУ ВО «Ярославский государственный технический университет».

Россия, 150025, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 88.

Тел.: (903) 638-12-55, эл. почта: albalush@mail.ru

Ключевые слова: поперечный изгиб, критическая наклонная трещина, сцепление, продольные и поперечные смещения.

В статье предложен метод расчета предельных состояний железобетонных элементов при поперечном изгибе. В основу положена модель критической наклонной трещины, разделяющей элемент на блоки. Разрешающая система алгебраических уравнений получена с учетом особенностей взаимодействия смежных блоков по сохраняющему сплошность бетону, а также по пересекающим трещину стержням продольной и поперечной арматуры.

Введение

Необходимость совершенствования методов прогнозирования механической безопасности железобетонных элементов (ЖБЭ), работающих в условиях поперечного изгиба при доминировании поперечных сил, сохраняется, несмотря на многолетний опыт их исследования, проектирования и эксплуатации. Актуальность таких расчетов повышается при необходимости учета особых воздействий (в соответствии с СП 296.1325800.2017 «Здания и сооружения. Особые воздействия»).

Вопросам прочности ЖБЭ по наклонным сечениям посвящено значительное число работ как отечественных [1–5], так и зарубежных исследователей [6–9]. Среди исследований, опубликованных в последние десятилетия, можно отметить те, авторами которых являются: А. С. Залесов, [1, 2], Ю. А. Климов [2], С. Б. Крылов, В. И. Травуш [3], И. Н. Старишко [4], Т. А. Мухамедиев, С. А. Зенин [5], E. C. Bentz, F. J. Vecchio, M. P. Collins [9].

В данной работе предлагается обобщающий имеющийся опыт расчетная модель исследовательского характера, предназначенная для детальной и методологически единой оценки прочности и жесткости ЖБЭ в целях оптимизации их конструктивных решений при расширенных сочетаниях силовых факторов, а также уточнения инженерных методов расчета.

Материалы и методы

Критической наклонной трещиной (КНТ) будем называть область локализации разрушения железобетонного элемента в процессе его разделения на

части в условиях плоского поперечного изгиба. Область применения модели составляют статически нагруженные нетрещиностойкие элементы, для которых до образования краевых трещин справедлива гипотеза плоских сечений, с симметричными относительно плоскости изгиба поперечным сечением, схемами продольного, а также (при наличии) поперечного и наклонного армирования. В общем случае в зоне КНТ действуют изгибающий момент M , поперечное усилие Q и продольное усилие N (при $N \neq 0, M/N \geq h/2$, где h – высота сечения элемента).

Расчетная траектория КНТ моделируется трехзвенной ломаной линией $ABCD$ (рис. 1), состоящей из:

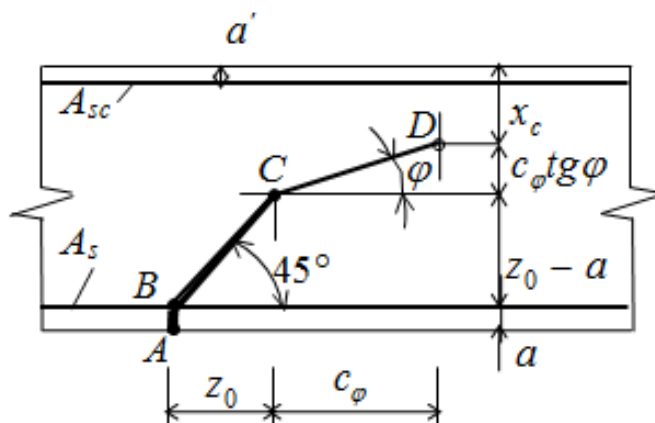


Рис. 1. Расчетная траектория КНТ

1) краевого участка AB , нормального к продольной оси элемента в пределах защитного слоя бетона a для растянутой арматуры A_s (ориентация определяется положением главных площадок в момент трещинообразования в точке A);

2) среднего участка BC от растянутого арматурного пояса до нейтральной линии в момент трещинообразования, расположенной на расстоянии z_0 от крайнего растянутого волокна, с углом наклона 45° к продольной оси элемента в соответствии с ориентацией главных площадок в момент трещинообразования в точке C ;

3) участка CD при вершине КНТ в точке D , имеющего угол наклона φ к продольной оси элемента и длину проекции c_φ , подлежащие определению.

В рамках кинематической гипотезы рассматриваются две компоненты взаимных смещений бортов КНТ: 1) продольное смещение U вдоль оси ЖБЭ (ширина раскрытия КНТ) и 2) поперечное смещение V по нормали к оси ЖБЭ (сдвиг КНТ). Условия совместности деформаций в КНТ определяются суперпозицией взаимных смещений, обусловленных действием внутренних усилий M, N и Q :

$$\begin{cases} U(\xi) = U_M(\xi) - U_N \geq 0, \\ V(\xi) = V_M(\xi) - V_Q. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь для продольных U_M и поперечных V_M смещений за счет изгибающего момента M (рис. 2) из геометрических соображений имеем:

Статическую схему КНТ составляют (рис. 3) (для упрощения здесь и далее рассматриваются элементы прямоугольного профиля шириной b при отсутствии наклонной арматуры):

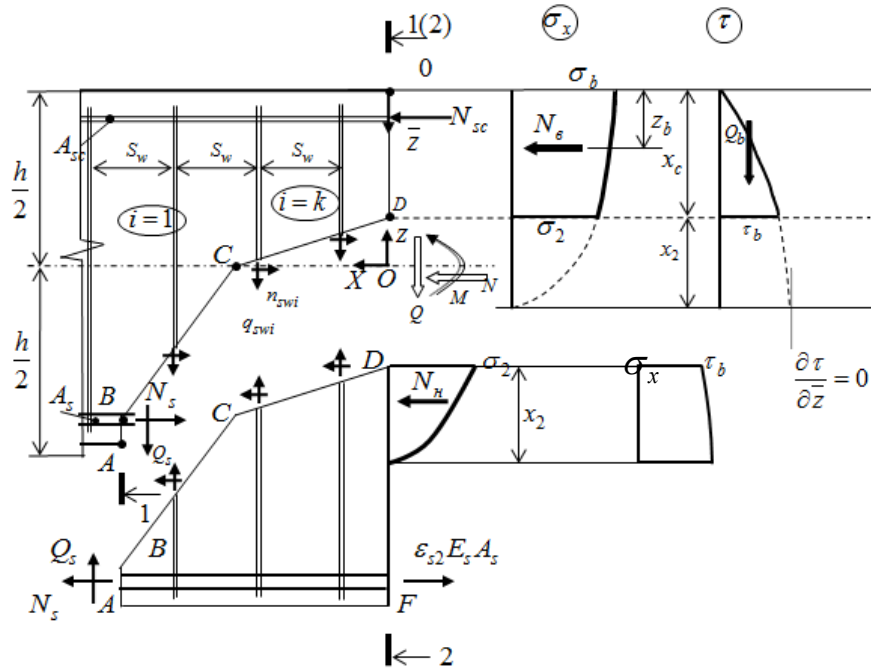


Рис. 3. Статическая схема КНТ

– продольное N_b и поперечное Q_b усилия в сохраняющем сплошность бетоне. При этом в сечении 2-2 распределение сжимающих нормальных напряжений σ_x принимается по квадратной параболе:

$$\sigma_x(\bar{z}) = \sigma_b \left[1 - \frac{\bar{z}^2}{(x_c + x_2)^2} \right], \quad \bar{z} = \frac{h}{2} - z. \quad (4)$$

Для касательных напряжений в сжатой зоне сечения 2-2 также принимается параболическая зависимость, но с максимумом под вершиной КНТ:

$$\tau(\bar{z}) = \frac{\tau_b}{x_c(x_c + 2x_2)} [2(x_c + x_2) - \bar{z}] \cdot \bar{z}; \quad (5)$$

– осевое усилие $N_{sc} = \varepsilon_{sc} E_s A_{sc}$ в арматурной ветви A_{sc} сжатой зоны определяется с учетом совместности деформирования с бетоном и (4), т. е. при

$$\varepsilon_{sc} = \frac{\sigma_b}{E_b(\varepsilon_b)} \left(1 - \frac{(a')^2}{(x_c + x_2)^2} \right); \quad (6)$$

– осевое усилие в растянутой продольной арматуре A_s –

$$N_s = \varepsilon_s E_s A_s; \quad (7)$$

– осевые усилия в каждом i – стержне поперечной арматуры, пересекаемой



КНТ –

$$q_{swi} = \varepsilon_{swi} E_{sw} A_{swi}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (8)$$

При этом в запас прочности принимается самое неблагоприятное положение поперечных стержней по длине КНТ – наиболее нагруженный стержень $i = 1$ отстоит от устья КНТ (точка A) на расстоянии шага s_w поперечной арматуры. Следующие поперечные стержни $i = 2, \dots, k$ располагаются по длине проекции КНТ с регулярным шагом s_w .

– поперечное (нагельное) усилие Q_s в продольной растянутой арматуре и поперечные нагельные усилия n_{swi} ($i = 1, \dots, k$) в стержнях поперечной арматуры, пересекаемых КНТ в точках с координатами z_{wi} .

Работой бетона на растяжение и сдвиг в зоне раскрытия КНТ в запас прочности пренебрегается.

В формулах (4)–(8) используются следующие условные обозначения:

$x_c = h - z_0 - c_\phi \tan \phi$ – высота сжатой зоны над вершиной КНТ;

x_2 – высота сжатой зоны бетона под вершиной КНТ;

σ_b – нормальное напряжение крайнего сжатого волокна бетона;

τ_b – касательное напряжение в бетоне на уровне вершины КНТ;

ε_{sc} – деформация укорочения продольной арматуры A_{sc} над вершиной КНТ;

ε_s – относительная деформация растянутой продольной арматуры A_s в КНТ;

A_s, A_{sc} – площади сечения растянутой и сжатой продольной арматуры;

E_s, E_{sw} – модули упругости продольной и поперечной арматуры;

$E_b(\varepsilon)$ – модуль деформации сжатого бетона;

a' – расстояние от верхней грани до центра тяжести арматуры A_{sc} ;

A_{swi} – площадь сечения i -го стержня поперечной арматуры;

ε_{swi} – относительная деформация i -го стержня поперечной арматуры;

$k = \left\lfloor \frac{z_0 + c_\phi}{s_w} \right\rfloor$ – общее количество пересекаемых КНТ поперечных стержней,

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – знак округления до ближайшего меньшего целого числа.

Предполагая для упрощения отсутствие внешних нагрузок в пределах КНТ, уравнения равновесия в КНТ записываются в виде:

$$\begin{cases} N = N_b + N_{sc} - N_s - \sum_{i=1}^k n_{swi}, \\ N\left(\frac{h}{2} - a\right) + M = N_b z_b - Q_b(z_0 - a + c_\varphi) + N_{sc}(h_0 - a') - \\ - \sum_{i=1}^k i \cdot q_{swi} \cdot s_w \pm \sum_{i=1}^k n_{swi} \left(\frac{h}{2} - a + z_{wi}\right), \\ Q = Q_b + \sum_{i=1}^k q_{swi} + Q_s \end{cases} \quad (9)$$

где $h_0 = h - a$, а при отсутствии поперечной арматуры $A_{sw} = 0$, $q_{sw} = n_{sw} = 0$.

Высота сжатой зоны x_2 под вершиной КНТ определяется из условия равновесия продольных сил в блоке $ABCDF$ (рис. 3):

$$N - N_b - N_{sc} = E_s A_s (\varepsilon_s - \varepsilon_{s2}) + N_H + \sum_{i=1}^k n_{swi}, \quad (10)$$

где ε_{s2} – относительная деформация удлинения продольной арматуры A_s в сечении 2-2;

N_H – равнодействующая сжимающих напряжений под вершиной КНТ.

Для определения же наибольшего сжимающего напряжения σ_b и деформации арматуры ε_{s2} – дополнительно рассматриваются условия равновесия в нормальном сечении 2–2, проведенном через вершину КНТ (рис.3), которые без учета вклада трещиноватого растянутого бетона, имеют вид:

$$\begin{cases} N = N_{b2} - N_{sc} - \varepsilon_{s2} E_s A_s, \\ N\left(\frac{h}{2} - a\right) + M = N_{b2} \left[h_0 - \frac{3}{8}(x_c + x_2) \right] + N_{sc}(h_0 - a') \end{cases} \quad (11)$$

где $N_{b2} = N_b + N_H = \frac{2}{3} \sigma_b b (x_c + x_2)$.

Касательное напряжение τ_b на уровне вершины КНТ определяется из условия стабилизации положения вершины, при рассматриваемом уровне внешней нагрузки, когда главные растягивающие напряжения в точке D достигают прочности бетона при растяжении $\sigma_{mt} = R_{bt}$. Тогда, принимая угол поворота главных площадок в вершине КНТ равным углу наклона φ ее привершинного участка CD , с учетом:

$$\sigma_z = \sigma_x - \frac{2\tau_b}{\operatorname{tg} 2\varphi}, \quad (12)$$

где в соответствии с (4) $\sigma_x = \sigma_b \cdot \left[1 - \frac{x_c^2}{(x_c + x_2)^2} \right]$,

для касательного напряжения τ_b имеем выражение:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_b^2} = R_{bt}. \quad (13)$$

Взаимосвязь кинематических и силовых параметров задачи устанавливается соотношениями осевых смещений и относительных деформаций арматурных элементов в их пересечениях с КНТ. Учитывается, что осевые смещения арматуры относительно противолежащих (оппозитных) бортов КНТ в сумме равны соответствующему взаимному смещению бортов КНТ $u_{sP} + u_{sG} = U_s$, $u_{sw,P} + u_{sw,G} = V_{sw}$, а деформации арматуры в трещине имеют градиент по ширине ее раскрытия $\varepsilon_{sP} \neq \varepsilon_{sG}$, $\varepsilon_{sw,P} \neq \varepsilon_{sw,G}$ (рис. 4).

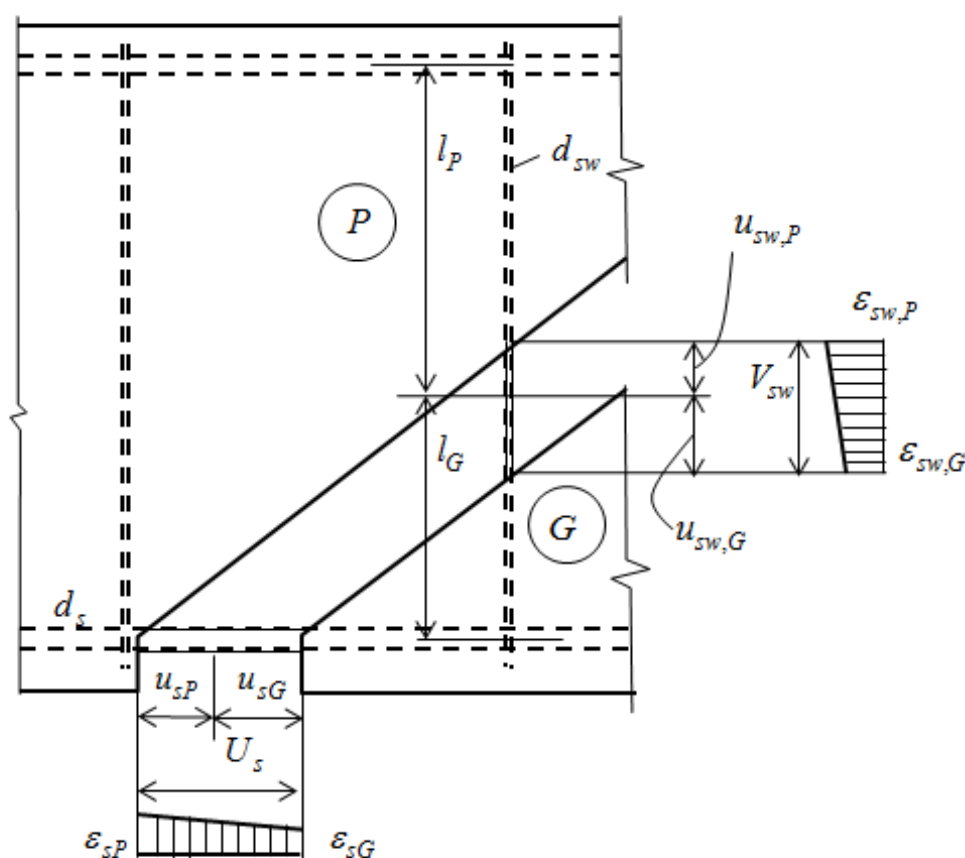


Рис. 4. Осевые смещения и относительные удлинения арматурных элементов в их пересечениях с КНТ

При этом применяется локальный закон сцепления арматуры с бетоном, представленный на рис. 5 [10]. Здесь τ_{cy} – касательные напряжения сцепления арматуры с бетоном; $g = u_s - u_{bt}$ – смещения арматуры относительно бетона при перемещениях арматуры u_s и бетонной обоймы u_{bt} . На упругой стадии сцепления I используется степенная зависимость $\tau - g$:

$$\tau_{cy}(g) = \tau_R \left(\frac{g}{g_R} \right)^{0.4}, \quad (14)$$

где $\tau_R = 2.5\sqrt{R_b}$, МПа – прочность сцепления и $g_R \cong u_R = 1.0$ мм – предельное упругое смещение.

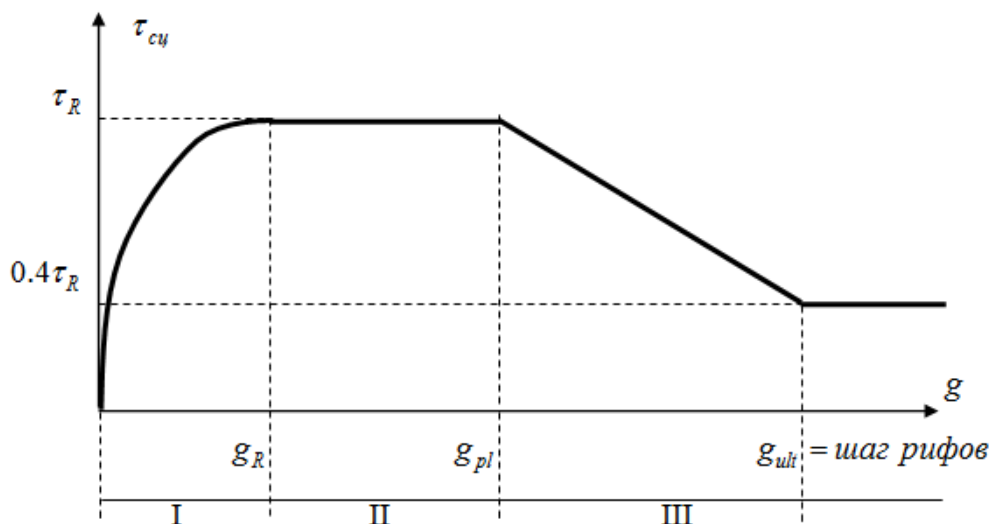


Рис. 5. Зависимость $\tau_{cy} - g$

Завершение «пластической» стадии II принимается при смещениях $g_{pl} \cong u_{pl} = 2.0$ мм. Нисходящую ветвь диаграммы $\tau - g$ (стадия III) целесообразно рассматривать только при оценке живучести конструктивных систем.

На стадии «упругого» сцепления для каждого арматурного элемента, пересекаемого КНТ, унифицированно используются три «типовых» соотношения между относительными деформациями ε_s , ε_{sl} и перемещениями арматуры u_s , u_{sl} (рис. 6), полученные с использованием результатов [11] и уравнения равновесия арматуры при ее смещении относительно бетона:

$$1) \Phi_1(\varepsilon_s, \varepsilon_{sl}, u_s, u_{sl}) = 0$$

$$\left[(1 + \alpha_E \mu) \varepsilon_{sl} - \alpha_E \mu \varepsilon_s \right]^2 - \varepsilon_s^2 = Y \cdot (u_{sl}^{1.4} - u_s^{1.4}), \quad (15)$$

где $\alpha_E = E_s/E_b$ – коэффициент приведения;

μ – коэффициент армирования;

E_s, E_b – модули упругости арматуры и бетона,

$$Y = \frac{8(1 + \alpha_E \mu)}{1.4 E_s d_{s(sw)}} \cdot \frac{\tau_R}{u_R^{0.4}};$$

$$2) \Phi_2(\varepsilon_s, u_s, u_{sl}) = 0$$

$$u_{sl} = \frac{1}{Y \cdot t_a} \left\{ \left[\sqrt{Y \left(\frac{\varepsilon_s^2}{Y} - u_s^{1.4} + t_a u_s - t_b \right)} - \frac{t_a l Y}{2} \right]^2 - \varepsilon_s^2 + Y \cdot u_s^{1.4} + Y \cdot t_b \right\}, \quad (16)$$

где $t_a = 0.8057[\text{ед.длины}]^{0.4}$ и $t_b = 0.0416[\text{ед.длины}]^{1.4}$ – размерные коэффициенты аппроксимирующей функции $g^{1.4}(\zeta) = t_a \cdot \zeta - t_b$, использованной при интегрировании выражения $l = \int_{g_l}^g \frac{dg}{\sqrt{\varepsilon_s^2 - Y[g^{1.4} - (g(\zeta))^{1.4}]}}$;

$$3) \Phi_3(\varepsilon_s, \varepsilon_{sl}, u_s, u_{sl}) = 0$$

$$(\varepsilon_s - \varepsilon_{sl})E_s = \frac{4l}{d_{s(sw)}} \cdot \frac{\varepsilon_{sl} \cdot \tau_R \cdot \left(u_s^{0.4} + \frac{\varepsilon_{sl}}{\varepsilon_s} u_{sl}^{0.4} \right)}{(\varepsilon_s + \varepsilon_{sl}) \cdot u_R^{0.4}}, \quad (17)$$

где эпюра касательных напряжений τ_{cu} на участке l аппроксимируется функцией

$$\tau_{cu}(\zeta) = \tau_{sl} + (\tau_s - \tau_{sl}) \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{l} \right)^{\frac{\varepsilon_{sl}}{\varepsilon_s}}.$$

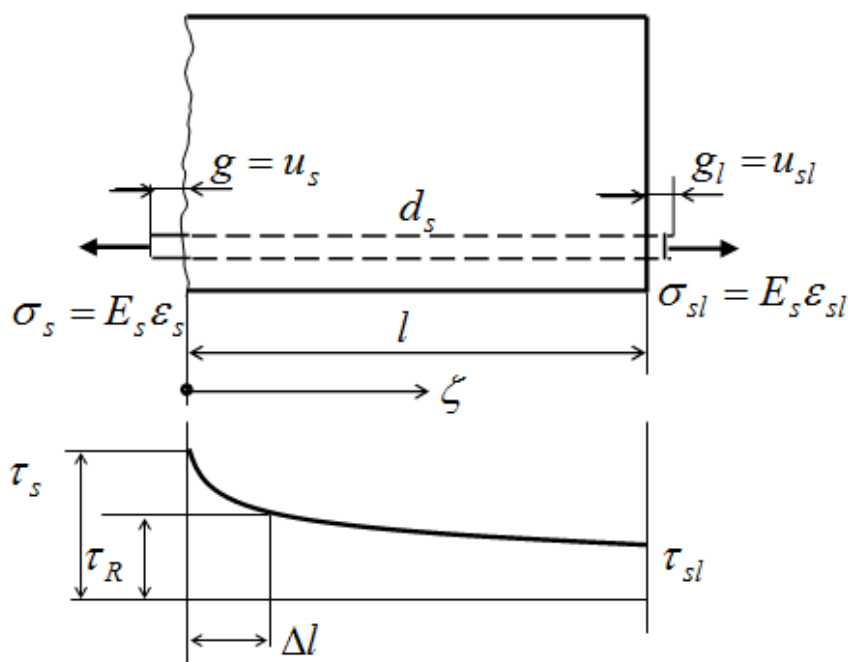


Рис. 6. Эпюра касательных напряжений сцепления на участке l

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Расчет железобетонных конструкций по прочности, трещиностойкости и деформациям / А. С. Залесов, И. К. Никитин, Л. Л. Лемыш, Э. Н. Кодыш. – Москва : Стройиздат, 1988. – 320 с. – ISBN 5-274-00085-1.



2. Залесов, А. С. Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил / А. С. Залесов, Ю. А. Климов. – Киев : Будивельник, 1989. – 104 с. – ISBN 5-7705-0187-1.
3. Крылов, С. Б. Модель прочности наклонных сечений балок произвольной формы / С. Б. Крылов, В. И. Травуш, А. С. Крылов // Вестник НИЦ «Строительство». – Москва, 2020. – № 4 (27). – С. 46–64.
4. Старишко, И. Н. Новое направление по расчету прочности изгибаемых железобетонных элементов по наклонным сечениям с примером расчета опытной балки / И. Н. Старишко // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. – 2021. – № 5 (17). – Р. 479–499.
5. Мухамедиев, Т. А. Оценка надежности метода расчета прочности наклонных сечений железобетонных элементов с различной формой поперечного сечения / Т. А. Мухамедиев, С. А. Зенин, А. С. Жарких // Вестник НИЦ «Строительство». – Москва, 2022. – № 33 (2). – С. 139–149.
6. Leonhardt, F. The Stuttgart shear tests, 1961 / F. Leonhardt, R. Walther. – London : Cement and Concrete Association, 1961. – 134 p.
7. Kani, G. N. J. The riddle of shear failure and its solution / G. N. J. Kani // ACI Journal. – 1964. – № 61. – P. 441–467.
8. Fenwick, R. C. Mechanisms of shear resistance of concrete beams / R. C. Fenwick, T. Paulay // Journal of the Structural Division. – 1968. – № 10 (94). – P. 2325–2350.
9. Bentz, E. C. Simplified modified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements / E. C. Bentz, F. J. Vecchio, M. P. Collins // ACI Structural Journal. – 2006. – P. 614–624.
10. Model Code for Concrete Structures / CEB-FIP. – English : Ernst & Sohn, 2010. – Vol. 1. – 432 p.
11. Холмянский, М. М. Контакт арматуры с бетоном / М. М. Холмянский. – Москва : Стройиздат, 1981. – 184 с.

BELOV Vyacheslav Vyacheslavovich¹ doctor of technical sciences, chief expert on construction; BALUSHKIN Aleksandr Leonidovich², candidate of technical sciences, associate professor of the chair of construction of buildings and structures

CALCULATION MODEL OF CRITICAL INCLINED CRACK UNDER TRANSVERSE BENDING OF REINFORCED CONCRETE ELEMENTS. PART I

¹Atomenergoproekt JSC.

82, Savushkina St., Saint Petersburg, 197183, Russia.

Tel.: (921) 920 24 01, e-mail: VVBelov@spbaep.ru

²Yaroslavl State Technical University.

88, Moskovsky Prospect, Yaroslavl, 150023, Russia.

Tel.: (4852) 44-36-61; (903) 638-12-55; e-mail: albalush@mail.ru

Key words: transverse bending, critical inclined crack, bond, longitudinal and transverse displacements.

This article proposes a method for calculating the ultimate limit states of reinforced concrete elements under transverse bending. It is based on a model of a critical inclined crack dividing the element into blocks. A resolving system of algebraic equations is derived taking into account the interactions between adjacent blocks along the concrete that maintains continuity, as well as along the longitudinal and transverse reinforcement bars that intersect the crack.



REFERENCES

1. Zalesov A. S., Nikitin I. K., Lemysh L. L., Kodysh E. N. Raschet zhelezobetonnykh konstruktsiy po prochnosti, treshchinostoikosti i deformatsiyam [Calculation of reinforced concrete structures for strength, crack resistance and deformations]. Moscow, Stroyizdat, 1988, 320 p.
2. Zalesov A. S., Klimov Yu. A. Prochnost zhelezobetonnykh konstruktsiy pri deistvii poperechnykh sil [Strength of reinforced concrete structures under the action of transverse forces]. Kyiv, Budivelnik, 1989, 104 p.
3. Krylov S. B., Travush V. I., Krylov A. S. Model prochnosti naklonnykh secheniy balok proizvolnoy formy [Strength model of inclined sections of beams of arbitrary shape]. Vestnik NITS Stroitelstvo [Bulletin of the Scientific Research Center of Construction]. Moscow, 2020, № 4 (27), P. 46–64.
4. Starishko I. N. Novoe napravlenie po raschetu prochnosti izгибаемых zhelezobetonnykh ehlementov po naklonnym secheniyam s primerom rascheta opytной balki [A new approach to calculating the strength of flexural reinforced concrete elements on inclined sections with an example of calculating an experimental beam]. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. Moscow, 2021, № 5 (17), P. 479–499.
5. Mukhamediev T. A., Zenin S. A., Zharkikh A. S. Otsenka nadezhnosti metoda rascheta prochnosti naklonnykh secheniy zhelezobetonnykh ehlementov s razlichnoy formoy poperechnogo secheniya [Evaluation of the reliability of the method for calculating the strength of inclined sections of reinforced concrete elements with different cross-sectional shapes]. Vestnik NITS Stroitelstvo [Bulletin of the Scientific Research Center of Construction]. 2022, № 33 (2), P. 139–149.
6. Leonhardt F. Walther R. The Stuttgart shear tests. London. Cement and Concrete Association, 1961, 134 p.
7. Kani G.N.J. The riddle of shear failure and its solution. ACI Journal. 1964, № 61, P. 441–467.
8. Fenwick R.C., Paulay T. Mechanisms of shear resistance of concrete beams. Journal of the Structural Division. 1968, № 10 (94), P. 2325–2350.
9. Bentz E. C., Vecchio F. J., Collins M. P. Simplified modified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements. ACI Structural Journal. 2006, P. 614–624.
10. Model Code for Concrete Structures. CEB-FIP. Ernst & Sohn, 2010, Vol. 1, 432 p.
11. Kholmyanskiy M. M. Kontakt armatury s betonom [Contact of reinforcement with concrete]. Moscow, Stroyizdat, 1981, 184 p.

© В. В. Белов, А. Л. Балушкин, 2026

Получено: 19.12.2025 г.