



УДК 621.644

**Д. В. КАПИТАНОВ**, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики; **А. М. ЛЕКОНЦЕВ**, студент

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОГО ТРУБОПРОВОДА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ФУССА–ВИНКЛЕРА

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет» им Н. И. Лобачевского».

Россия, 603022, г. Н. Новгород, просп. Гагарина, д. 23, корп. 6.

Тел.: 8(831) 462-31-95; эл. почта: lekonse.a21@gmail.com, denis.kapitanov@itmm.unn.ru

*Ключевые слова:* трубопровод, неконсервативная устойчивость, упругое основание, метод Бубнова–Галеркина, собственные значения.

---

*В работе представлено численно–аналитическое исследование динамической потери устойчивости прямолинейного трубопровода на упругом основании, левый конец которого закреплен при помощи упругого шарнира, а правый свободен. При решении задач такого типа обычно используется приближенный метод Бубнова–Галеркина, где решение представляется в виде ряда по функциям сравнения. Так как величина параметра упругого основания влияет на форму деформации, по которой происходит потеря устойчивости, возникает вопрос о минимальном количестве форм в данном разложении, на который метод Бубнова–Галеркина ответа не дает. Учитывая это, рассмотрен динамический подход к исследованию устойчивости, основанный на анализе характеристических показателей системы. Кроме того, в работе рассматриваются влияния различных параметров системы на границу устойчивости.*

---

### Введение

Трубопровод, транспортирующий поток жидкости, является одним из основных элементов механических конструкций, используемых в машиностроении, приборостроении и строительстве сооружений. Основной задачей при проектировании таких конструкций является исследование их устойчивости, обеспечивающее надежность, безопасность и долговечность при эксплуатации.

При составлении математической модели, описывающей динамику трубопровода, используют подходы из теории стержней, представляя трубопровод как полый стержень, вдоль которого движется поток жидкости [1]. Выделяют два характера потери устойчивости: статический, связанный с переходом из начального устойчивого положения равновесия в положение, характеризующееся смежной формой деформации, и динамический, сопровождающийся возникновением колебаний [2-3]. Отметим, что динамический подход исследования устойчивости, в отличие от статического, является универсальным и может быть применен к любому типу задач. Как правило, в этом случае при исследовании используют различные численные методы. Основным из них является метод Бубнова–Галеркина, основанный на представлении решения задачи в виде разложения в ряд по первым формам колебаний [4-9].

Хотя этот метод имеет широкое применение, его сходимости в случае несамосопряженной проблемы собственных значений не доказана [2], а в случае наличия упругого основания число базисных функций, необходимых для

использования метода Бубнова–Галеркина, определяется величиной жесткости упругого основания [4, 10]. В данной работе предлагается подход, основанный на анализе характеристических показателей системы и не имеющий ограничений по числу используемых функций сравнения.

### Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейный трубопровод, представленный полым стержнем длины  $l$  с изгибной жесткостью  $EI$  и распределенной массой  $m$  (рис. 1). Один конец трубопровода имеет шарнирное закрепление с пружиной жесткости  $C$ , оказывающей сопротивление на поворот, а другой – свободный. Трубопровод находится на упругом основании Фусса–Винклера с коэффициентом жесткости  $h$ . Внешнее трение в системе пропорционально скорости движения (с коэффициентом  $\xi$ ), внутреннее – скорости изменения деформации (с коэффициентом  $\mu$ ) согласно гипотезе Кельвина–Фохта. Вдоль трубопровода с постоянной скоростью  $v$  движется идеальная несжимаемая жидкость распределенной массы  $M$ .

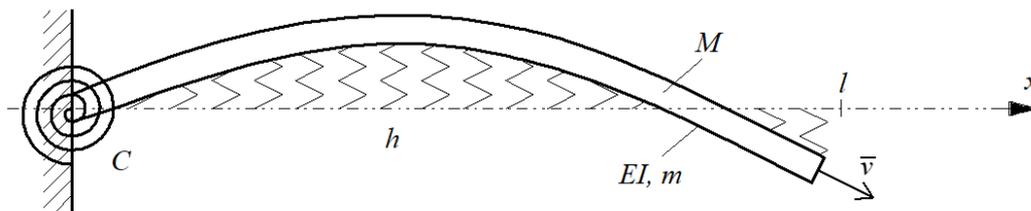


Рис. 1. Трубопровод на упругом основании, транспортирующий поток жидкости

Уравнение малых плоских изгибных колебаний имеет вид [1]:

$$\mu EI \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \xi \frac{\partial y}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + hy = F_r. \quad (1)$$

Согласно теории стержней левая часть уравнения (1) содержит слагаемые, соответствующие описанию изгибных колебаний  $y(x, t)$  прямого стержня, где  $x$  – продольная координата,  $t$  – время.  $F_r$  – величина гидродинамической силы, действующей на конструкцию со стороны потока жидкости. Выражение этой силы имеет вид:

$$F_r = - \left( Mv^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2Mv \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right).$$

Слагаемые, входящие в выражение гидродинамической силы, в литературе называют центробежной силой, силой Кориолиса и инерциальной силой соответственно.

Использование вариационного принципа Гамильтона–Остроградского позволяет получить не только уравнение движения (1), но и граничные условия задачи [1]:

$$y|_{x=0} = 0, C \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Задача (1) – (2) в безразмерных величинах имеет следующий вид:



$$\gamma \frac{\partial^5 y}{\partial \varphi^4 \partial \tau} + \frac{\partial^4 y}{\partial \varphi^4} + \delta \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + 2 \sqrt{\delta \beta} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \tau} + \kappa \frac{\partial y}{\partial \tau} + \psi y = 0; \quad (3)$$

$$y|_{\varphi=0} = 0, R \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=0}, \frac{\partial^3 y}{\partial \varphi^3} \Big|_{\varphi=1} = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=1} = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \varphi = \frac{l}{x}, \tau = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}} t, \gamma = \frac{\mu}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}, \delta = \frac{Mv^2 l^2}{EI}, \beta = \frac{M}{m+M},$$

$$\kappa = \frac{\xi l^2}{EI} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}, \psi = \frac{hl^4}{EI}, R = \frac{Cl}{EI}.$$

### Исследование устойчивости с использованием метода Бубнова–Галеркина

Использование метода Бубнова–Галеркина при исследовании устойчивости предполагает наличие полной системы функций сравнения, удовлетворяющих краевым условиям. Чаще всего в качестве этих функций используют собственные функции, являющиеся решением проблемы собственных значений исходной задачи. Для системы (1) – (2) найти их аналитически невозможно из-за наличия смешанной производной в выражении для силы Кориолиса.

Рассмотрим упрощенную задачу при условии отсутствия трения в системе и движения потока жидкости. Уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \psi y = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде  $y(\varphi, \tau) = Y(\varphi)T(\tau)$ , в результате чего получаем задачу на проблему собственных значений:

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \beta^4 Y(\varphi) = 0, \quad (6)$$

$$Y|_{\varphi=0} = 0, R \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} - \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=0} = 0, \frac{\partial^3 Y}{\partial \varphi^3} \Big|_{\varphi=1} = 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=1} = 0. \quad (7)$$

Решение задачи (6) – (7) имеет вид:

$$Y_i(\varphi) = C_1 \sin(\beta_i \varphi) + C_2 \cos(\beta_i \varphi) + C_3 \operatorname{sh}(\beta_i \varphi) + C_4 \operatorname{ch}(\beta_i \varphi),$$

где частотные параметры  $\beta_i$  определяются из характеристического уравнения системы:

$$\beta \operatorname{ch}(\beta) \sin(\beta) - \beta \operatorname{sh}(\beta) \cos(\beta) - R \operatorname{ch}(\beta) \cos(\beta) - R = 0.$$

Коэффициенты  $C_i$  определяются из краевых условий (7) с учетом нормировки форм:

$$\int_0^1 (Y_i(\varphi))^2 d\varphi = 1.$$

Данный вид функций сравнения при исследовании приводит к громоздким вычислениям. Рассмотрим представление этих функций в полиномиальном виде. Уравнение (3) говорит о том, что полиномы должны быть не ниже четвертого порядка:

$$y_i(\varphi) = \sum_{k=0}^{i+3} C_k \varphi^k, \quad i = 1, 2, \dots$$



Параметры  $C_k$  в этих выражениях находятся из условий ортонормированности функций ( $\int_0^1 y_i(\varphi)y_j(\varphi)d\varphi = \delta_{ij}$ ) при согласовании их с крайевыми условиями (7).

На рис. 2 приведены первые четыре формы деформации, представленные в виде функций Крылова ( $Y_i, i = \overline{1,4}$ ) и в полиномиальном виде ( $y_i, i = \overline{1,4}$ ) при  $R = 10$ . Среднеквадратичное отклонение между формами  $\Delta y_1 = 0,014, \Delta y_2 = 0,09, \Delta y_3 = 0,213, \Delta y_4 = 0,346$ .

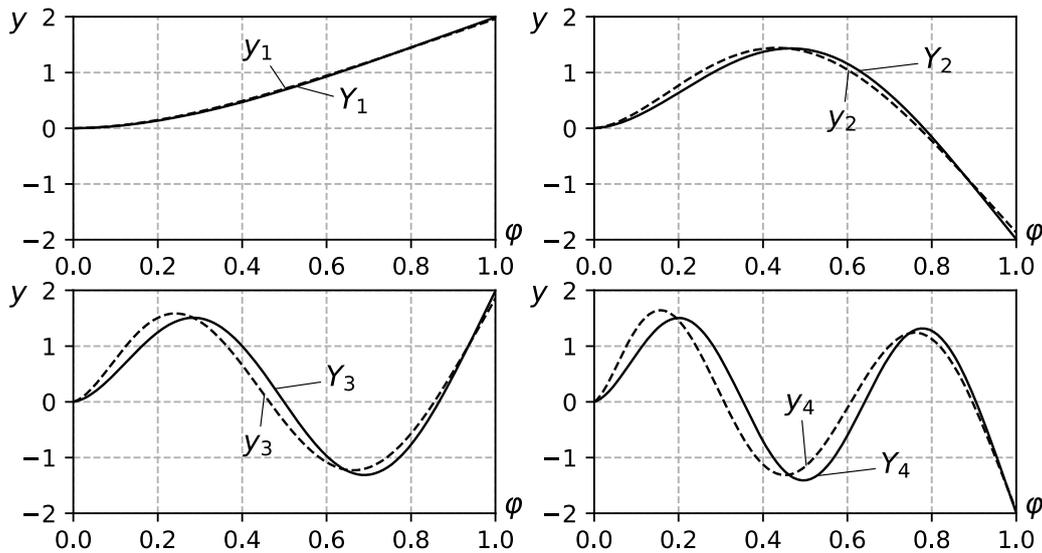


Рис. 2. Первые четыре формы деформации, представленные в виде функций Крылова ( $Y_i$ ) и в полиномиальном виде ( $y_i$ )

При исследовании устойчивости по методу Бубнова–Галеркина представим решение задачи (3) – (4) в виде ряда по первым формам деформации:

$$y(\varphi, \tau) = \sum_{i=1}^n T_i(\tau)Y_i(\varphi). \quad (8)$$

После подстановки выражения (8) в уравнение (3) и проведения стандартной процедуры метода Бубнова–Галеркина получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно  $T_i, i = \overline{1, n}$ :

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial \tau^2} + \kappa \frac{\partial T_j}{\partial \tau} + \psi T_j + \sum_{i=1}^n \left( \alpha_{ji} \left( \gamma \frac{\partial T_i}{\partial \tau} + T_i \right) + \delta \beta_{ji} T_i + 2 \sqrt{\delta \beta} \gamma_{ji} \frac{\partial T_i}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (9)$$

где  $j = \overline{1, n}, \alpha_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial^4 X_i}{\partial \varphi^4} X_j d\varphi, \beta_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial^2 X_i}{\partial \varphi^2} X_j d\varphi, \gamma_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial X_i}{\partial \varphi} X_j d\varphi.$

Определение границы устойчивости системы (9) осуществляется с помощью критерия Рауса–Гурвица при варьировании скорости потока жидкости от нулевого до некоторого критического значения.

Стоит отметить, что при исследовании устойчивости методом Бубнова–Галеркина возникает вопрос о минимальном количестве функций сравнения, которое требуется для получения верного результата. Это связано с тем, что величина жесткости упругого основания влияет не только на границу потери



устойчивости, но и на форму деформации, по которой эта потеря происходит [4]. Данный метод также не позволяет установить, по какой форме произошла потеря устойчивости. Учитывая эти недостатки, рассмотрим альтернативный подход, в основе которого лежит исследование характеристических показателей системы [11].

**Исследование устойчивости при помощи анализа поведения характеристических показателей системы**

Представим решение задачи (3) – (4) в виде  $y(\varphi, \tau) = W(\varphi)e^{\lambda\tau}$ , где  $W(\varphi)$  – функция, отвечающая за форму деформации,  $\lambda$  – характеристический показатель, соответствующей данной форме. Согласно критерию Ляпунова [12], если действительные части всех характеристических показателей  $\lambda$  отрицательные, то колебания в системе имеют затухающий характер, и исходное прямолинейное состояние равновесия является устойчивым. Если хотя бы один из характеристических показателей имеет положительную действительную часть, то колебания по этой моде будут иметь нарастающую амплитуду, и произойдет потеря устойчивости. Для определения  $W(\varphi)$  и  $\lambda$  получаем задачу на проблему собственных значений:

$$(1 + \gamma\lambda) \frac{\partial^4 W}{\partial \varphi^4} + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + 2 \sqrt{\delta\beta\lambda} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + (\kappa\lambda + \psi + \lambda^2)W = 0, \tag{10}$$

$$W|_{\varphi=0} = 0, R \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=0}, \frac{\partial^3 W}{\partial \varphi^3} \Big|_{\varphi=1} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=1} = 0. \tag{11}$$

Решение краевой задачи имеет вид:

$$W = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\xi_i \varphi}, \tag{12}$$

где  $\xi_i, i = \overline{1,4}$ , – корни уравнения.

$$F(\lambda, \xi) = (\gamma\lambda + 1)\xi^4 + \delta\xi^2 + 2 \sqrt{\delta\beta\lambda}\xi + \lambda^2 + \kappa\lambda + \psi = 0.$$

После подстановки решения (12) в граничные условия (11) получим систему для определения коэффициентов  $A_i (i = \overline{1,4})$ :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0, \\ A_1(R\xi_1 - \xi_1^2) + A_2(R\xi_2 - \xi_2^2) + A_3(R\xi_3 - \xi_3^2) + A_4(R\xi_4 - \xi_4^2) = 0, \\ A_1\xi_1^3 e^{\xi_1} + A_2\xi_2^3 e^{\xi_2} + A_3\xi_3^3 e^{\xi_3} + A_4\xi_4^3 e^{\xi_4} = 0, \\ A_1\xi_1^2 e^{\xi_1} + A_2\xi_2^2 e^{\xi_2} + A_3\xi_3^2 e^{\xi_3} + A_4\xi_4^2 e^{\xi_4} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Для существования нетривиального решения системы (13) необходимо, чтобы ее определитель  $D(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  был равен нулю.

Учитывая, что в общем случае параметры  $\lambda$  и  $\xi_i (i = \overline{1,4})$  являются комплекснозначными, получим нелинейную систему из 10 алгебраических уравнений:



$$\begin{cases} \operatorname{Re} F(\lambda, \xi_j) = 0, j = \overline{1,4}, \\ \operatorname{Im} F(\lambda, \xi_j) = 0, j = \overline{1,4}, \\ \operatorname{Re} D(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0, \\ \operatorname{Im} D(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) решается методом Ньютона. Последовательно увеличивая параметр скорости потока жидкости от нуля до критического значения, соответствующего неустойчивости, находим собственные значения  $\lambda$ . В качестве начального приближения метода будем использовать аналитическое решение упрощенной задачи (6) – (7).

На рис. 3 представлены гадографы первых трех характеристических показателей  $\lambda$  при увеличении безразмерного параметра скорости потока жидкости  $\delta$ . Потеря устойчивости носит динамический характер и, в зависимости от величины упругого основания, проявляется по различным модам деформации. На левом графике потеря устойчивости происходит по второй моде колебаний при  $\delta_{\text{кр}} = 31,82$  ( $R = 100; \gamma = 0,0005; \kappa = 0,1; \beta = 0,2; \psi = 5$ ), на правом – по третьей при  $\delta_{\text{кр}} = 78,45$  ( $R = 100; \gamma = 0,0005; \kappa = 0,1; \beta = 0,4; \psi = 50$ ).

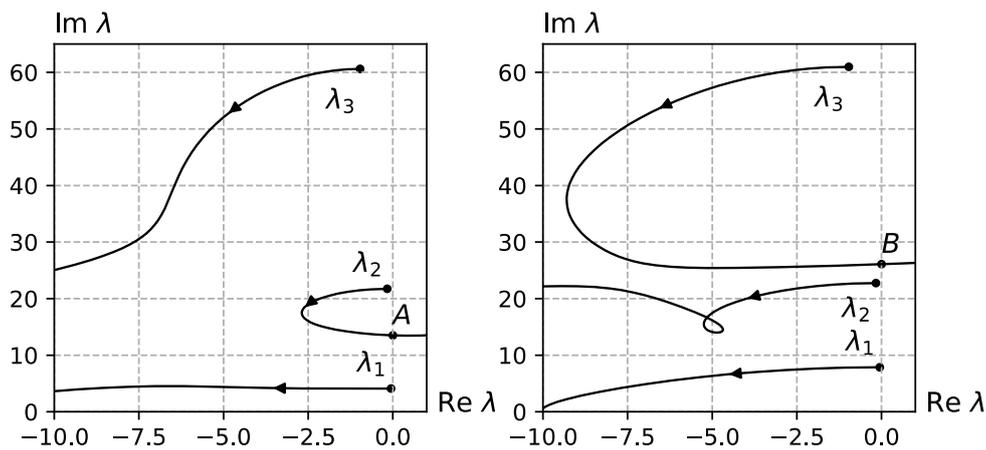


Рис.3. Потеря устойчивости по второй и третьей моде деформации

### Анализ результатов

На рис. 4 представлены графики зависимости безразмерной критической скорости потока жидкости  $\delta_{\text{кр}}$  от значения безразмерной жесткости упругого основания  $\psi$  ( $R = 100; \gamma = 0,0015; \kappa = 1,5; \beta = 0,18$ ). Представленные результаты получены с помощью исследования характеристических показателей системы (1), двухмодового (2), трехмодового (3) и четырехмодового (4) приближения по методу Бубнова–Галеркина, где базисные функции представлены в полиномиальном виде. Начиная с некоторого значения жесткости упругого основания, двухмодовое приближение дает завышенную оценку, а при дальнейшем увеличении параметра  $\psi$  аналогичная ситуация происходит и при трехмодовом приближении. Таким образом, выбор недостаточного числа функций сравнения может привести к завышенным оценкам критической скорости потока, что возможно вызовет нежелательные последствия.

На рис. 5 представлена зависимость критической скорости потока жидкости от параметров внешнего и внутреннего трений ( $\psi = 10$ ;  $R = 100$ ;  $\beta = 0,18$ ), а на рис. 6 – от параметров жесткостей шарнира и упругого основания ( $\kappa = 2,5$ ;  $\gamma = 0,0035$ ;  $\beta = 0,18$ ). Следует отметить, что рост значений данных параметров повышает границу устойчивости системы.

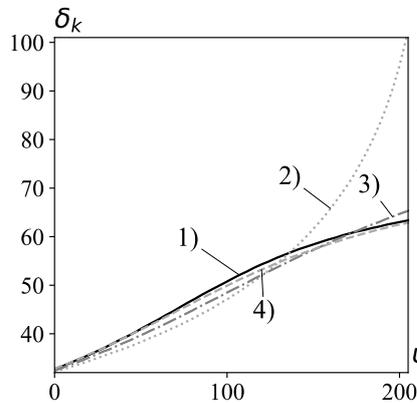


Рис. 4. Исследование границы устойчивости при разных подходах

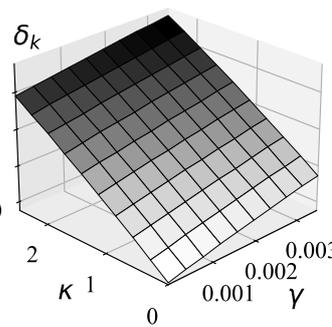


Рис. 5. Влияние внешнего и внутреннего трений на границу устойчивости

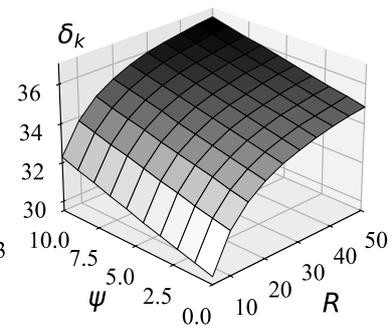


Рис. 6. Влияние жесткостей шарнира и основания на границу устойчивости

*Статья рекомендована к публикации в «Приволжском научном журнале» по итогам выступления на конференции Нижегородского фестиваля науки (24–25 октября 2024 г.) в секции «Физико-математические науки».*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Динамика конструкций гидроэроупругих систем / К. В. Фролов, Н. А. Махутов, С. М. Каплунов [и др.] ; Ин-т машиноведения им. А. А. Благонравова. – Москва : Наука, 2002. – 397 с. – ISBN 5-02-002818-5. – Текст : непосредственный.
2. Болотин, В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – Москва : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. – 339 с. – Текст : непосредственный.
3. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем : Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 352 с. – Текст : непосредственный.
4. Вольмир, А. С. Устойчивость упругих систем / А. С. Вольмир. – Москва : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – 879 с. – Текст : непосредственный.
5. Задача Бека с пульсирующей следящей силой / В. П. Радин, В. П. Чирков, А. В. Щугорев, В. Н. Щугорев. – Текст : непосредственный // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2022. – № 11 (752). – С. 3–11.
6. Овчинников, В. Ф. Влияние внешней кубической вязкости на динамику консольного стержня, нагруженного следящей силой / В. Ф. Овчинников, Д. В. Капитанов, Е. Г. Глазова. – Текст : непосредственный // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Том 86, № 1. – С. 83–93.
7. Устойчивость стержня с упругим шарниром при нагружении распределенной неконсервативной нагрузкой / В. П. Радин, В. П. Чирков, Е. В. Позняк, О. В. Новикова. – Текст : непосредственный // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. –



2023. – № 5 (758). – С. 3–13.

8. Радин, В. П. Устойчивость упругого закрепленного трубопровода / В. П. Радин, В. П. Чирков, В. Э. Цой. – Текст : непосредственный // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2024. – № 1 (766). – С. 31–40.

9. Lolov, D. S. Dynamic Stability of a Straight Pipe Conveying Pulsatile Flow Under Thermal Loads / D. S. Lolov, Sv. V. Lilkova-Markova // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2023. – № 2. – С. 5–10.

10. Численно-аналитическое исследование устойчивости шарнирно закрепленного трубопровода с потоком жидкости и шарнирно закрепленного сжатого стержня на упругом основании / Д. В. Капитанов, М. Е. Сулова, О. С. Егорова. – Текст : непосредственный // Машиноведение и инновации : конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС–2017) : материалы конференции. – Москва, 2018. – С. 202–205. – ISBN 978-5-4465-1752-7.

11. Капитанов, Д. В. Неконсервативная устойчивость трубопровода и консольного стержня / Д. В. Капитанов, В. Ф. Овчинников, Л. В. Смирнов. – Текст : непосредственный // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 2. – С. 117–123.

12. Горяченко, В. Д. Элементы теории колебаний : учебное пособие для вузов / В. Д. Горяченко. – 2-е изд., перераб. и доп. / В. Д. Горяченко. – Москва : Высшая школа, 2001. – 391 с. – Текст : непосредственный.

**KAPITANOV Denis Vladimirovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the chair of theoretical, computer and experimental mechanics; LEKONTSEV Artem Maksimovich, student**

#### **STUDY OF NON-CONSERVATIVE STABILITY OF A STRAIGHT PIPELINE ON AN ELASTIC FOUNDATION OF FUSS-WINKLER**

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod.

23, Gagarina Prospekt, building 6, 603022, Nizhny Novgorod, Russia.

Tel.: 8(831) 462-31-95; e-mail: lekonse.a21@gmail.com, denis.kapitanov@itmm.unn.ru

*Key words:* pipeline, non-conservative stability, elastic foundation, Bubnov–Galerkin method, eigenvalues

---

*The paper presents a numerical and analytical study of the dynamic loss of stability of a straight pipeline on an elastic foundation, the left end of which is fixed using an elastic hinge, and the right end is free. When solving problems of this type, the approximate Bubnov–Galerkin method is usually used, where the solution is presented as a series of comparison functions. Since the value of the elastic foundation parameter affects the form of deformation, along which the loss of stability occurs, the question arises about the minimum number of forms in this expansion, to which the Bubnov–Galerkin method does not give an answer. Taking this into account, a dynamic approach to studying stability is considered, based on the study of the characteristic indicators of the system. In addition, the paper considers the influence of various system parameters on the stability boundary.*

---

#### REFERENCES

1. Frolov K. V., Makhutov N. A., Kaplunov S. M., et al. Dinamika konstruktsiy gidroaerouprugikh sistem [Dynamics of Structures of Hydro-Aeroelastic Systems]. A. A. Blagonravov Institute of Machine Science. Moscow, Nauka, 2002. 397 p.



2. Bolotin V. V. Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti [Non-conservative Problems of Elastic Stability Theory]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1961, 339 p.

3. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. Ustoychivost i kolebaniya uprugikh sistem: Sovremennye kontseptsii, paradoxy i oshibki [Stability and Vibrations of Elastic Systems: Modern Concepts, Paradoxes, and Errors]. 4-e izd., pererab., Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1987, 352 p.

4. Volmir A. S. Ustoychivost uprugikh sistem [Stability of Elastic Systems]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1963, 879 p.

5. Radin V. P., Chirkov V. P., Shchugorev AV., Shchugorev V. N. Zadacha Beka s pulsiruyushchey sleduyushchey siloy [Beck's Problem with Pulsating Follower Force]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie [Bulletin of Higher Educational Institutions. Mechanical Engineering]. 2022, № 11 (752), P. 3–11.

6. Ovchinnikov V. F., Kapitanov D. V., Glazova E. G. Vliyanie vneshney kubicheskoy vyzkostki na dinamiku konsolnogo sterzhnya, nagruzhennogo sleduyushchey siloy [The Effect of External Cubic Viscosity on the Dynamics of a Cantilever Rod Loaded by a Follower Force]. Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]. 2024, Vol. 86, № 1, P. 83–93.

7. Radin V. P., Chirkov V. P., Poznyak E. V., Novikova O. V. Ustoychivost sterzhnya s uprugim sharnirom pri nagruzhении raspredelennoy nekonservativnoy nagruzkoy [Stability of a Rod with an Elastic Hinge under Distributed Non-Conservative Load]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie [Bulletin of Higher Educational Institutions. Mechanical Engineering]. 2023, № 5 (758), P. 3–13.

8. Radin V. P., Chirkov V. P., Tsoy V. E. Ustoychivost uprugogo zakreplennogo truboprovoda [Stability of an Elasticly Fixed Pipeline]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie [Bulletin of Higher Educational Institutions. Mechanical Engineering]. 2024, № 1 (766), P. 31–40.

9. Lolov D. S., Lilkova-Markova Sv. V. Dynamic Stability of a Straight Pipe Conveying Pulsatile Flow under Thermal Loads // PNRPU Mechanics Bulletin, 2023, № 2, P. 5–10.

10. Kapitanov D. V., Suslova M. E., Yegorova O. S. Chislennoye-analiticheskoye issledovaniye ustoychivosti sharnirovo zakreplennogo truboprovoda s potokom zhidkosti i sharnirovo zakreplennogo szhatogo sterzhnya na uprugom osnovanii [Numerical-Analytical Study of the Stability of a Hinged Pipeline with Liquid Flow and a Hinged Compressed Rod on an Elastic Foundation]. Mashinovedeniye i innovatsii. Konferentsiya molodykh uchyonykh i studentov (MIKMUS-2017). Materialy konferentsii, Moscow, 2018, P. 202–205.

11. Kapitanov D. V., Ovchinnikov V. F., Smirnov L. V. Nekonservativnaya ustoychivost tru boprovoda i konsolnogo sterzhnya [Non-Conservative Stability of a Pipeline and a Cantilever Rod]. Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin [Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability]. 2010, № 2, P. 117–123.

12. Goryachenko V. D. Elementy teorii kolebaniy [Elements of Vibration Theory] : uchebnoye posobiye dlya vuzov. 2-e izd., pererab. i dop. V. D. Goryachenko. Moscow, Vysshaya shkola, 2001, 391 p.

© Д. В. Капитанов, А. М. Леконцев, 2025

Получено: 15.12.2024 г.