



УДК 539.3

**В. И. ЕРОФЕЕВ**, д-р физ.-мат. наук, проф., директор; **Н. Д. СУЛАЙМОНОВ**, лаборант

### **ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В БАЛКЕ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА, ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОТОРОГО ОПИСЫВАЕТСЯ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ ФОЙХТА–КЕЛЬВИНА**

Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН», Россия, 603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, д. 85.

Тел.: (831) 432-03-00; эл. почта: erof.vi@yandex.ru; nizor.sulaymonov@mail.ru

*Ключевые слова:* вязкоупругая среда Фойхта–Кельвина, балка, изгибная волна, дисперсия, затухание.

---

*Рассматривается динамика балки, материал которой подчиняется закону деформирования среды Фойхта–Кельвина. Распространение изгибной волны в такой балке описывается уравнением Бернулли–Эйлера, дополненным слагаемым, характеризующим вязкость материала. Решение уравнения отыскивается в виде бегущей гармонической волны. От исходного дифференциального уравнения в частных производных осуществляется переход к алгебраическому комплексному дисперсионному уравнению, связывающему частоту и волновое число, позволяющему вычислить фазовую и групповую скорости волны, определить закономерности ее распространения и затухания.*

---

#### **Введение**

Изгибные волны, распространяющиеся в стержнях и стержневых системах, играют важную роль в формировании вибрационных полей строительных конструкций [1], транспортных объектов наземного [2-3], воздушного [4] и подводного [5] применения, а также энергетических комплексов [6].

Модельное описание волновых процессов, учитывающее их дисперсионные и диссипативные зависимости, будет способствовать как развитию эффективных методов виброзащиты объектов, так и развитию методов формирования направленного излучения стержневых элементов конструкций.

#### **1. Математическая модель и дисперсионное уравнение**

Рассмотрим бесконечную балку (модель Бернулли–Эйлера), совершающую изгибные колебания. Предполагаем, что балка изготовлена из реологического материала Фойхта–Кельвина [7-8], представляющего собой систему из параллельно расположенных элементов – упругого (пружины с модулем Юнга  $E$ ) и вязкого (демпфера с коэффициентом вязкости  $\nu_1$ ) (рис. 1).

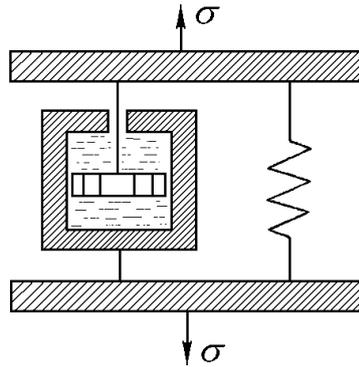


Рис. 1. Реологическая модель Фойхта–Кельвина, описывающая деформирование вязкоупругого материала

Полное напряжение этого материала равно сумме напряжений в вязком и упругом элементах, испытывающих одинаковые деформации. Срединную линию балки принимаем нерастяжимой, что возможно при относительно малых амплитудах изгибных колебаний [7].

Балку можно считать бесконечной, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. В работе [9] на основе точных решений модельных задач для упругих систем обосновано существование согласованных концевых гасителей различных видов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе. Это позволяет рассматривать модель балки без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по ней, – как бегущие изгибные волны.

Уравнение динамики изучаемой системы имеет вид:

$$\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + EI_y \nu_1 \frac{\partial^5 U}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $U(x,t)$  – поперечное перемещение срединной линии балки,  $\rho$  – плотность материала,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $I_y$  – осевой момент инерции сечения.

В безразмерных переменных  $z = x \sqrt[4]{\frac{\rho F}{EI_y t_0^2}}$ ,  $\tau = \frac{t}{t_0}$  уравнение (1) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} + a \frac{\partial^5 W}{\partial z^4 \partial \tau} = 0, \quad (2)$$

где  $W = \frac{U}{U_0}$ ,  $\tau = \frac{t}{t_0}$ ,  $z = \frac{x}{x_0}$ ,  $U_0$  – величина перемещения, начиная с которой возникает необходимость учета растяжимости срединной линии балки,  $t_0$  – масштаб времени,  $x_0$  – масштаб координаты,  $a = \frac{\nu_1}{t_0}$  – безразмерный коэффициент внутреннего трения.

Решение уравнения (2) будем искать в виде бегущей гармонической волны:

$$W = A e^{i(\Omega \tau - K z)} + A^* e^{-i(\Omega \tau - K z)}. \quad (3)$$



Здесь  $A = A_0 e^{i\varphi}$  – комплексная амплитуда волны,  $A_0$  – действительная амплитуда,  $\Omega t - Kz = \Phi(z, \tau)$  – фаза волны,  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  – частота волны,  $T$  – период волны,  $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$  – волновое число,  $\Lambda$  – длина волны,  $A^*$  – величина, комплексно-сопряженная  $A$ .

Согласно (2) и (3) частота и волновое число изгибной волны, распространяющейся в вязкоупругой балке, связаны соотношением:

$$-\Omega^2 + K^4 + iK^4 \Omega a = 0. \quad (4)$$

При анализе дисперсионных уравнений, содержащих комплексные коэффициенты, часто выделяются две задачи [10]:

- 1) частота считается действительной величиной, а волновое число – комплексной величиной (так принято при решении краевых задач);
- 2) волновое число считается действительной величиной, а частота – комплексной величиной (так принято при решении задачи Коши).

## 2. Анализ дисперсионных зависимостей при решении задач Коши

При решении второй задачи, подставляя  $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$  в уравнение (4), получим алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами, выделяя действительную и мнимую части которого, приходим к системе двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + K^4 - a\Omega_2 K^4 = 0; \\ a\Omega_1 K^4 - 2\Omega_1 \Omega_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Второе уравнение системы (5) можно представить в виде:

$$\Omega_1 (aK^4 - 2\Omega_2) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) допускает два различных случая.

*Случай 1.* Действительная часть частоты не равна нулю тождественно, т.е.  $\Omega_1 \neq 0$ . Тогда система уравнений (5) позволяет определить зависимость действительной части частоты от волнового числа (закон дисперсии) (рис. 2):

$$\Omega_1 = \pm K^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{4} K^4} \quad (7)$$

и мнимую часть частоты (затухание) (рис. 3):

$$\Omega_2 = \frac{a}{2} K^4. \quad (8)$$

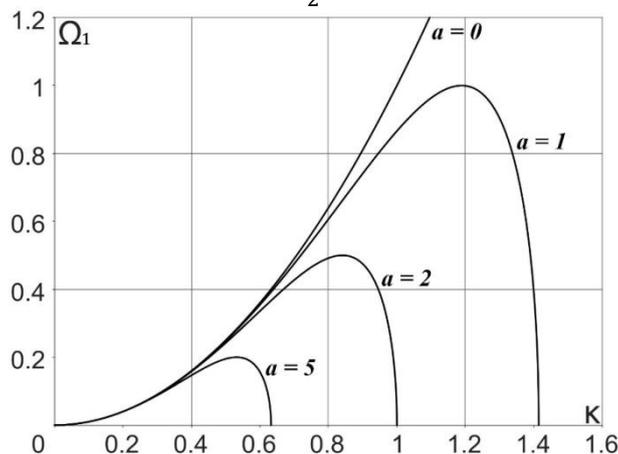


Рис. 2. Зависимости действительной части частоты от волнового числа при варьировании параметра  $a$

Из рис. 2 видно, что при  $a = 0$   $\Omega_1 = \pm K^2$ , т.е. зависимость (7) совпадает с классическим законом дисперсии незатухающей изгибной волны, описываемым моделью балки Бернулли–Эйлера. Действительные значения частоты имеются при любом значении волнового числа, изменяющегося от нуля до бесконечности. При  $a > 0$  зависимости действительных частот от волновых чисел приобретают экстремальный характер. Сначала при увеличении волнового числа действительная частота достигает своего максимума, а затем уменьшается до нуля. При  $|K| \geq \sqrt{\frac{2}{a}}$  появляется «зона непропускания» бегущих изгибных волн. Размер зоны определяется параметром  $a$ , при увеличении которого «зона непропускания» увеличивается, а область существования действительных значений частоты  $|K| < \sqrt{\frac{2}{a}}$  уменьшается, уменьшается и максимальное значение действительной частоты.

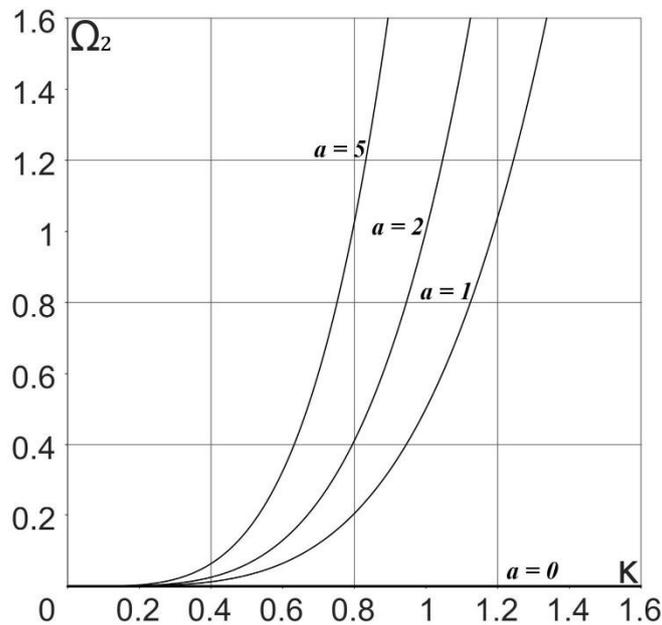


Рис. 3. Зависимости мнимой части частоты от волнового числа  $K$  при варьировании параметра  $a$

Из рис. 3 видно, что интенсивность затухания изгибной волны определяется двумя параметрами: она линейно возрастает с увеличением  $a$  (т.е. коэффициента вязкости материала, из которого изготовлена балка) и пропорциональна  $K^4$ . При  $a = 0$  мнимая часть частоты отсутствует, и бегущая изгибная волна является незатухающей.

Соотношение (7) позволяет вычислить фазовую (рис. 4):

$$V_{\phi} = \pm K \sqrt{1 - \frac{a^2}{4} K^4} \quad (9)$$

и групповую (рис. 5):

$$V_{\text{Гр}} = \pm \frac{K(2 - a^2 K^4)}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4} K^4}} \quad (10)$$

скорости волны.

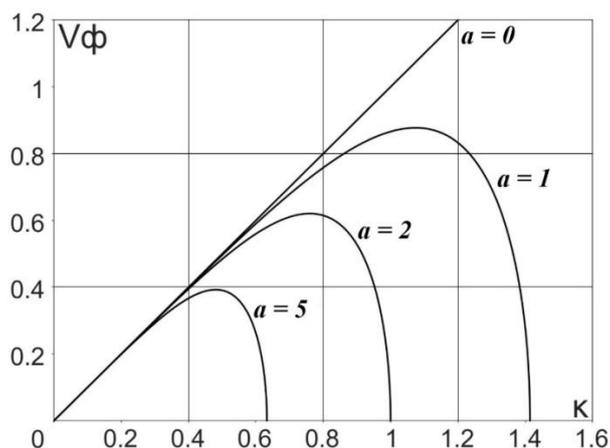


Рис. 4. Зависимости фазовой скорости от волнового числа при варьировании параметра  $a$

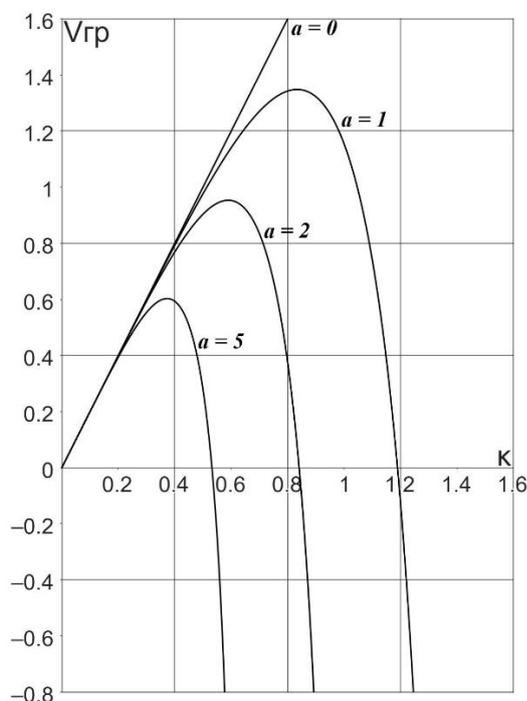


Рис. 5. Зависимости групповой скорости от волнового числа при варьировании параметра постели  $a$

Из рис. 4 и 5 видно, что при  $a = 0$  как фазовая, так и групповая скорости имеют линейную зависимость от волнового числа, причем, групповая скорость всегда в два раза превосходит фазовую. «Зоны непропускания» бегущей изгибной волны в этом случае отсутствуют, они появляются при  $a > 0$ . По графикам можно определить, что «зоны непропускания» возникают при  $|K| > \sqrt{\frac{2}{a}}$ .

При  $|K| = \sqrt{\frac{2}{a}}$  фазовая скорость равна нулю. Групповая скорость равна нулю при  $|K| = \sqrt[4]{\frac{2}{a^2}}$  и после перехода этой точки меняет свое направление на отрезке



$\sqrt[4]{\frac{2}{a^2}} < |K| < \sqrt{\frac{2}{a}}$ . В точке  $K = \sqrt{\frac{2}{a}}$  (в которой фазовая скорость равна нулю) групповая скорость асимптотически стремится к «минус бесконечности». Графики, приведенные на рис. 4 и 5, так же, как и графики, приведенные на рис. 2, подтверждают, что бегущие изгибные волны существуют в области волновых чисел  $|K| \leq \sqrt{\frac{2}{a}}$ . Чем больше значение параметра  $a$ , тем меньше максимальное  $K$ , при котором такие волны могут существовать.

Сравнивая между собой значения фазовой и групповой скоростей, получим соотношение:

$$\frac{V_\phi}{V_{гр}} = \frac{K\sqrt{1-\frac{a^2}{4}K^4} \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}K^4}}{K(2-a^2K^4)} = \frac{1-\frac{a^2}{4}K^4}{2-a^2K^4}, \quad (11)$$

из которого следует, что нормальная дисперсия ( $V_\phi > V_{гр}$ ) достигается при выполнении условия  $|K| > \sqrt[4]{\frac{4}{3a^2}}$ , аномальная дисперсия ( $V_\phi < V_{гр}$ ) достигается только при выполнении условия  $|K| < \sqrt[4]{\frac{4}{3a^2}}$ , дисперсия отсутствует при  $|K| = \sqrt[4]{\frac{4}{3a^2}}$ .

На рис. 6 приведена зависимость модуля волнового числа  $|K|$  от коэффициента вязкости материала, из которого изготовлена балка ( $a$ ), а на рис. 7 – зависимость модуля длины волны  $|\Lambda| = 2\pi\sqrt[4]{\frac{3a^2}{4}}$  от того же параметра.

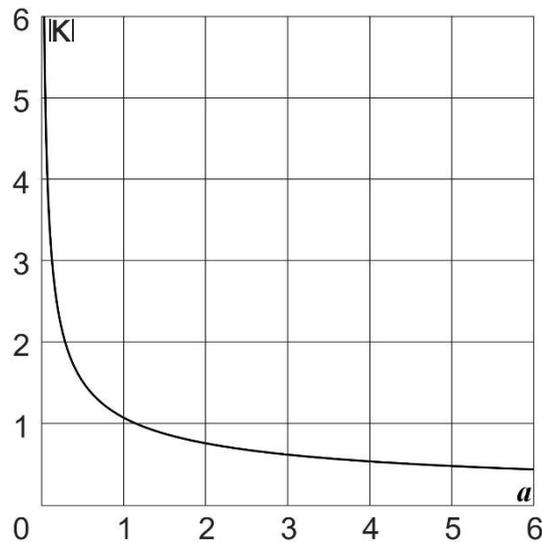


Рис. 6. Зависимость модуля волнового числа от параметра  $a$  для анализа характера дисперсии изгибной волны

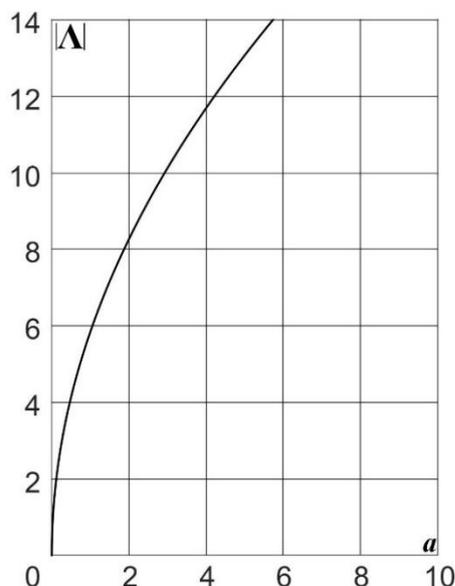


Рис. 7. Зависимость модуля длины волны от параметра  $a$  для анализа характера дисперсии изгибной волны

Ниже кривой  $|K|(a)$ , приведенной на рис. 6, находится область аномальной дисперсии изгибной волны, выше кривой – область нормальной дисперсии.

Ниже кривой  $|\Lambda|(a)$ , приведенной на рис. 7, находится область нормальной дисперсии изгибной волны, выше кривой – область аномальной дисперсии.

Вернемся к уравнению (6). Рассмотрим *Случай 2*. Действительная часть частоты тождественно равна нулю, т.е.  $\Omega_1 \equiv 0$ . Тогда система уравнений (5) покажет, что мнимая часть частоты будет определяться из соотношения:  $\Omega_2 \approx \frac{a}{2} K^4 \pm \frac{a}{2} K^4$ , из которого следует, что  $\Omega_2 = 0$  (возмущения в исследуемой балке отсутствуют), либо  $\Omega_2 \approx a K^4$  (возмущения затухают по закону (8), но с удвоенным коэффициентом пропорциональности).

#### Выводы

В результате проведенного исследования показано, что, если изгибные волны, распространяющиеся в упругой балке, обладают аномальной дисперсией (т.е. их групповая скорость превышает фазовую скорость во всем диапазоне длин волн), то для изгибных волн, распространяющихся в вязкоупругой (по модели Фойхта–Кельвина) балке, такая закономерность наблюдается не всегда. Характер дисперсии может измениться с аномального на нормальный (т.е. когда фазовая скорость волн превышает их групповую скорость) в зависимости от длины волны и величины коэффициента внутреннего трения в материале.

*Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF-2024-0031, № НИОКТР 1023032800130-3-2.3.2).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Овсянников, С. Н. Распространение звуковой вибрации в гражданских зданиях / С. Н. Овсянников. – Томск : Изд-во ТГАСУ, 2000. – 378 с. – ISBN 5930570329. – Текст : непосредственный.



2. Седов, М. С. Звукоизоляция / М. С. Седов. – Текст: непосредственный // Техническая акустика транспортных машин : справочник / под редакцией Н. И. Иванова. – Санкт-Петербург, 1992. – Глава 4. – С. 68–106.
3. Иванченко, И. И. Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки / И. И. Иванченко. – Москва : Наука, 2011. – 574 с. – ISBN 978-5-02-037488-1. – Текст : непосредственный.
4. Авиационная акустика / под ред. Мунина А. Г. – Москва : Машиностроение, 1986. – Том 1. – 248 с. – Том 2. – 264 с. – Текст : непосредственный.
5. Никифоров, А. С. Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах / А. С. Никифоров, С. В. Бурдин. – Ленинград : Судостроение, 1968. – 216 с. – Текст: непосредственный.
6. Колебания и вибрации в поршневых компрессорах / Ю. А. Видякин, Т. Ф. Кондратьева, Ф. П. Петрова, А. Г. Платонов. – Ленинград : Машиностроение, 1972. – 224 с. – Текст: непосредственный.
7. Вибрации в технике : справочник. В 6 томах. Том 1. Колебания линейных систем / Болотин В. В., Фролов К. В., Чирков В. П. [и др.]; ред. Болотин В. В. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Машиностроение, 1999. – 504 с. : ил. – ISBN 5-217-02898-X. – Текст : непосредственный.
8. Palmov, V. Vibrations of Elasto-Plastic Bodies / V. Palmov. – Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1998. – 312 p.
9. Весницкий, А. И. Избранные труды по механике / А. И. Весницкий. – Нижний Новгород : Наш дом, 2010. – 248 с. – ISBN 978-5-902390-12-1. – Текст : непосредственный.
10. Ерофеев, В. И. Дисперсия и затухание сдвиговой акустической волны, распространяющейся в пластине, лежащей на вязкоупругом основании / В. И. Ерофеев, Д. А. Бутыгин. – Текст : непосредственный // Приволжский научный журнал / Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород, 2023. – № 2. – С.38–43.

**EROFEEV Vladimir Ivanovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, director; SULAYMONOV Nizor Dalerovich, laboratory assistant**

**FLEXURAL WAVES IN A BEAM MADE OF A VISCOELASTIC MATERIAL  
WHOSE DEFORMATION IS DESCRIBED  
BY THE VOIGT–KELVIN RHEOLOGICAL MODEL**

Mechanical Engineering Research Institute of RAS – branch of Federal Research Center A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences.  
85, Belinskogo St., Nizhny Novgorod, 603024, Russia.  
Tel.: +7 (831) 432-03-00; e-mail: erof.vi@yandex.ru; nizor.sulaymonov@mail.ru  
*Key words:* Voigt–Kelvin viscoelastic medium, beam, flexural wave, dispersion, attenuation.

*The dynamics of a beam whose material obeys the Voigt–Kelvin law of medium deformation is considered. The propagation of a bending wave in such a beam is described by the Bernoulli–Euler equation supplemented by a term characterizing the viscosity of the material. The solution to the equation is sought in the form of a traveling harmonic wave. From the initial partial differential equation, a transition is made to an algebraic complex dispersion equation that relates the frequency and wave number, allowing one to calculate the phase and group velocities of the wave, and determine the patterns of its propagation and attenuation.*



## REFERENCES

1. Ovsianikov S. N. Rasprostranenie zvukovoy vibratsii v grazhdanskikh zdaniyakh [Propagation of Sound Vibration in Civil Buildings]. Tomsk, TGASU, 2000, 378 p.
2. Sedov M. S. Zvukoizolyatsiya [Soundproofing]. Tekhnicheskaya akustika transportnykh mashin: spravochnik [Technical Acoustics of Transport Vehicles: Handbook] : spravochnik. pod redaktsiyey Ivanova N. I., St. Petersburg, 1992, Glava 4, P. 68–106.
3. Ivanchenko I. I. Dinamika transportnykh sooruzheniy: vysokoskorostnie podvizhnie, seismicheskie i udarnie nagruzki [Dynamics of Transport Structures: High-Speed Moving, Seismic and Impact Loads]. Moscow, Nauka, 2011, 576 p.
4. Aviatsionnaya akustika [Aviation Acoustics]. pod redaktsiyey Munina A. G., Moscow, Mashinostroeniye, 1986, Vol.1, 248 p., Vol.2, 264 p.
5. Nikiforov A. S., Budrin S. V. Rasprostranenie i pogloshchenie zvukovoy vibratsii na sudakh [Propagation and Absorption of Sound Vibration on Ships]. Leningrad, Sudostroeniye, 1968, 216 p.
6. Vidyakin Yu. A., Kondratieva T. F., Petrova F. P., Platonov A. G. Kolebaniya i vibratsii v porshnevnykh kompressorakh [Oscillations and Vibrations in Piston Compressors]. Leningrad, Mashinostroeniye, 1972, 224 p.
7. Bolotin V. V., Frolov K. V., Chirkov V. P. [et al.] Vibratsii v tekhnike: spravochnik. Kolebaniya lineynykh sistem [Vibrations in Engineering. Oscillations of Linear Systems]. v 6 tomakh. Tom 1., 2nd ed., rev. and enl.; ed. Bolotin V. V. Moscow, Mashinostroeniye, 1999, 504 p. il. ISBN 5-217-02898-X.
8. Palmov V. Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 1998, 312 p.
9. Vesnitskiy A. I. Izbrannyye trudy po mekhanike [Selected Works on Mechanics]. Nizhny Novgorod, Nash dom, 2010, 248 p. ISBN 978-5-902390-12-1.
10. Erofeev V. I., Butygin D. A. Dispersiya i zatukhanie sdvigovoy akusticheskoy volny, rasprostranyayushchey v plastine, lezhashchey na vyazkouprugom osnovanii [Dispersion and Attenuation of a Shear Acoustic Wave Propagating in a Plate Lying on a Viscoelastic Foundation]. Privolzhskiy nauchny zhurnal [Privolzhsky Scientific Journal]. Nizhegorodskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitelnyy universitet. Nizhny Novgorod, 2023, № 2, P. 38–43.

© В. И. Ерофеев, Н. Д. Сулаймонов, 2025

Получено: 21.04.2025 г.