УДК 539.3/.6

С. В. БАКУШЕВ, д-р техн. наук, проф. кафедры механики

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ МАССИВНОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства».
Россия, 440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, д. 28.
Тел/факс: (8412) 49-72-77, эл. почта: office@pguas.ru
Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, внецентренное сжатие.

В статье рассматривается внецентренное сжатие массивного многослойного неоднородного упругого стержня с поперечным сечением, симметричным относительно одной из главных центральных осей инерции сечения.

Введение. Многослойные неоднородные упругие стержни, стойки и колонны, в силу особенностей распределения нормальных напряжений по ширине поперечного сечения, обладают некоторыми преимуществами перед однослойными конструкциями, в частности, позволяют экономить материал при одинаковой несущей способности [1]. Например, среднюю часть поперечного сечения колонны вполне можно изготовить из более слабого и дешевого материала, поскольку максимальные нормальные напряжения возникают в крайних (фибровых) волокнах поперечного сечения при ее изгибе.

Вопросам расчета внецентренно сжатых многослойных неоднородных упругих стержней посвящены многие исследования отечественных и зарубежных авторов. В статье [2] рассмотрена работа двухслойной железобетонной панели с комбинированным армированием при внецентренном сжатии. При этом внутренний слой выполнен из легкого, а внешний слой – из тяжелого бетона. Построена область прочности для различных гибкостей и процентов армирования. В статье [3] исследована работа внецентренно сжатой предварительно напряженной трубобетонной стойки с учетом нелинейной работы бетона. Установлено, что предварительно напряженная стойка обладает большей несущей способностью по сравнению с традиционной. В работе [4] рассмотрена методика расчета коротких бетонных элементов при внецентренном сжатии с большими эксцентриситетами. Показано, что несущая способность коротких железобетонных элементов, рассчитанная по предложенной методике, оказалась на 20-25%, а поперечная жесткость на 30-35% больше по сравнению с определенной по нормативной методике. В статье [5] предлагается общий метод расчета прочности и деформативности косо сжатых железобетонных колонн, усиленных железобетонной обоймой. В работе [6] рассматриваются особенности расчета и усиления железобетонных колонн композитными материалами, в частности, сетками.

В данной работе рассматриваются вопросы расчета и оценки несущей способности неоднородного многослойного упругого массивного стержня, находящегося в условиях внецентренного сжатия с поперечным сечением, симметричным относительно одной из главных центральных осей инерции сечения.

Теоретические основы. Рассмотрим упругий многослойный стержень, находящийся в условиях внецентренного сжатия. Стержень состоит из $n -$ слоев одинаковой длины, но различающихся как своими геометрическими размерами и формой, так и механическими характеристиками материалов. Слои стержня параллельны плоскости $Z0Y$; ширину слоев обозначим $h_i, i = 1,2,3, \dots, n$. Слои стержня не проскальзывают одно относительно другого; справедлива гипотеза плоских сечений, как при осевом растяжении-сжатии, так и при изгибе. На стержень действует сжимающая внецентренно приложенная сила F, след которой пересекает ось $0X$.

Поперечное сечение стержня (рис. 1) симметрично относительно оси $0X$, являющейся одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения.

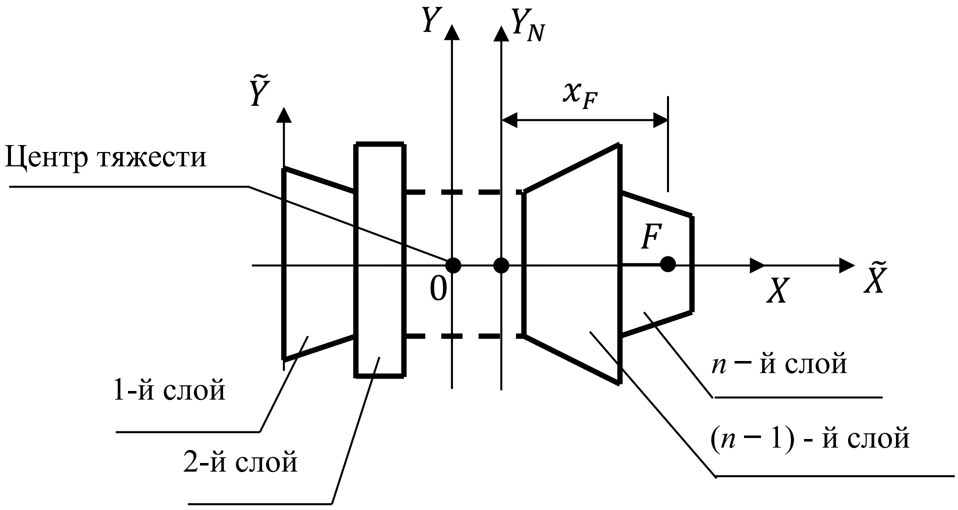

Рис. 1. Поперечное сечение стержня

Для определения положения другой главной центральной оси (оси 0Y), найдем центр тяжести поперечного сечения.

Для неоднородной плоской фигуры единичной толщины, расположенной перпендикулярно к оси $\tilde{Z}$, направленной к центру земли, центр тяжести в некоторой вспомогательной системе координат $\tilde{X}, \tilde{Y}$ определяется формулами [7]:

$$x_c = \frac{\int_A x \cdot \gamma_s(x,y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA}; \quad y_c = \frac{\int_A y \cdot \gamma_s(x,y) \cdot dA}{\int_A \gamma_s(x,y) \cdot dA}. \tag{1}$$

Здесь $\gamma_s(x, y) -$ вес единицы площади плоской фигуры;

$\int_A \gamma_s(x, y) \cdot dA -$ вес всей плоской фигуры.

В нашем случае $y_c = 0$,

$$x_c = \frac{\int_{A_1} x \cdot \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} x \cdot \gamma_2 \cdot dA + \dots + \int_{A_n} x \cdot \gamma_n \cdot dA}{\int_{A_1} \gamma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \gamma_2 \cdot dA + \dots + \int_{A_n} \gamma_n \cdot dA} = \frac{\gamma_1 S_{1y} + \gamma_2 S_{2y} + \dots + \gamma_n S_{ny}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \dots + \gamma_n A_n}. \tag{2}$$

Здесь $S_{1\tilde{y}}, S_{2\tilde{y}}, \dots, S_{n\tilde{y}} -$ статические моменты площадей поперечных сечений слоев стержня относительно вспомогательной оси $\tilde{Y}$;

$\gamma_1,\ \gamma_2, \dots,\ \gamma_n$ – объемные веса материалов слоев стержня;

$A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ – площади поперечных сечений слоев стержня.

Полное нормальное напряжение в каждой точке поперечного сечения будет складываться из нормального напряжения σ_z^N, обусловленного действием продольной силы $N = F$ и нормального напряжения σ_z^M, обусловленного действием изгибающего момента $M_y = F \cdot x_F$, где x_F – это расстояние от внешней сжимающей силы F до точки приложения продольной силы N.

Воспользовавшись результатами работы [8], запишем величину продольной силы в каждом слое рассматриваемого стержня:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots\frac{E_nA_n}{E_1A_1}};\\
N_2 &= \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots\frac{E_nA_n}{E_1A_1}}\frac{E_2A_2}{E_1A_1};\\
N_3 &= \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots\frac{E_nA_n}{E_1A_1}}\frac{E_3A_3}{E_1A_1};\dots;\\
N_n &= \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots\frac{E_nA_n}{E_1A_1}}\frac{E_nA_n}{E_1A_1}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно, нормальные напряжения σ_z^N в каждом слое рассматриваемого стержня будут определяться соотношениями:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1z}^N &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots+\frac{E_nA_n}{E_1A_1}}\frac{1}{A_1};\\
\sigma_{2z}^N &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots+\frac{E_nA_n}{E_1A_1}}\frac{E_2}{E_1A_1};\\
\sigma_{3z}^N &= \frac{N_3}{A_3} = \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots+\frac{E_nA_n}{E_1A_1}}\frac{E_3}{E_1A_1};\dots;\\
\sigma_{nz}^N &= \frac{N_n}{A_n} = \frac{F}{1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+\frac{E_3A_3}{E_1A_1}+\dots+\frac{E_nA_n}{E_1A_1}}\frac{E_n}{E_1A_1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

В работах [8] и [9] показано, что точка приложения равнодействующей внутренних продольных сил в каждом слое неоднородного упругого стержня не совпадает, вообще говоря, с центром тяжести неоднородного поперечного сечения стержня. В силу этого, действующую на стержень сжимающую силу F приведем не к центру тяжести неоднородного поперечного сечения, а к точке приложения равнодействующей внутренних продольных сил в каждом слое, координаты которой в нашем случае определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
&y_N = 0;\\
&\sigma_{1z} \cdot S_{1y_N} + \sigma_{2z} \cdot S_{2y_N} + \dots + \sigma_{nz} \cdot S_{ny_N} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь S_{iy_N}, $i = 1, 2, \dots, n$ – статические моменты площадей поперечных сечений каждого слоя стержня, вычисленные относительно оси Y_N, проходящей через точку приложения равнодействующей внутренних продольных сил в каждом слое.

$$S_{1y_N} = A_1 \cdot x_N^{(1)};\ S_{2y_N} = A_2 \cdot x_N^{(2)};\ \dots;\ S_{ny_N} = A_n \cdot x_N^{(n)}. \tag{6}$$

Рассматривая геометрию поперечного сечения неоднородного стержня, можно найти соотношение между координатами $x_N^{(1)}, x_N^{(2)}, \dots, x_N^{(n)}$ и, тем самым, определить положение оси Y_N [9].

После приведения внешней сжимающей силы F к точке приложения равнодействующей внутренних продольных сил в каждом слое, рассматриваемый стержень будет находиться в условиях осевого сжатия от продольной силы $N = F$ и изгиба от изгибающего момента $M_y = F \cdot x_F$. Здесь x_F − расстояние от силы F до оси Y_N.

Нормальные напряжения σ_z^M в поперечных сечениях каждого слоя рассматриваемого стержня от действия изгибающего момента $M_y = F \cdot x_F$ будут определяться зависимостями (рис. 2):

$$\sigma_{1z}^M = E_1 \frac{x_1}{\rho};\ \sigma_{2z}^M = E_2 \frac{x_2}{\rho};\ \ldots;\ \sigma_{nz}^M = E_n \frac{x_n}{\rho}. \qquad (7)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_m$ − это координаты точек поперечного сечения стержня в каждой неоднородности стержня, отсчитываемые от нейтральной линии – оси Y_M, обусловленной только действием изгибающего момента $M_y = F \cdot x_F$.

Положение нейтральной линии, обусловленной действием только изгибающего момента (оси Y_M), можно найти из условия равенства нулю продольной силы при действии только изгибающего момента:

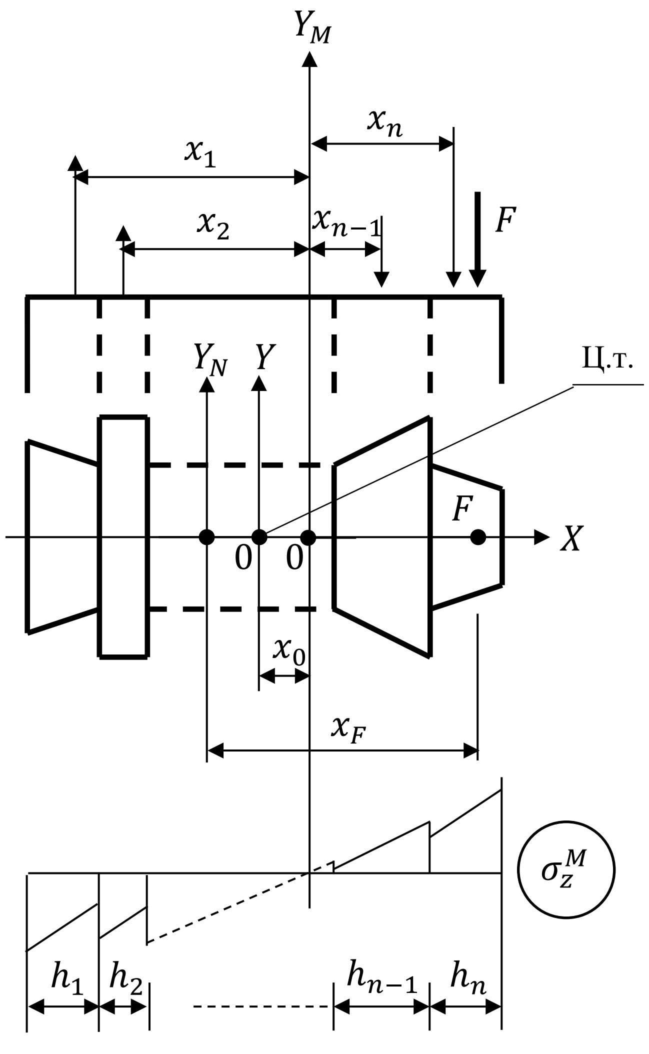

Рис. 2. Эпюра напряжений σ_z^M

$$N = \int_{A_1} \sigma_{1z}^M dA + \int_{A_2} \sigma_{2z}^M dA + \dots - \int_{A_{n-1}} \sigma_{n-1}^M dA - \int_{A_n} \sigma_n^M dA =$$
$$= \frac{E_1}{\rho} S_{1y_M} + \frac{E_2}{\rho} S_{2y_M} + \dots - \frac{E_{n-1}}{\rho} S_{(n-1)y_M} - \frac{E_n}{\rho} S_{ny_M} = 0.$$

То есть

$$E_1 S_{1y_M} + E_2 S_{2y_M} + \dots - E_{n-1} S_{(n-1)y_M} - E_n S_{ny_M} = 0. \tag{8}$$

Здесь $S_{1y_M}, S_{2y_M}, \dots, S_{ny_M}$ – статические моменты площадей поперечных сечений каждого слоя относительно нейтральной оси Y_M.

$$S_{1y_M} = A_1 \cdot x_M^{(1)};\ S_{2y_M} = A_2 \cdot x_M^{(2)};\ \dots;\ S_{ny_M} = A_n \cdot x_M^{(n)}. \tag{9}$$

Рассматривая геометрию поперечного сечения неоднородного стержня, можно найти соотношение между отрезками $x_M^{(1)}, x_M^{(2)}, \dots, x_M^{(n)}$ и, тем самым, определить положение оси Y_M.

Из соотношения (8) определяем положение нейтральной линии Y_M только от действия изгибающего момента $M_y = F \cdot x_F$, без учета нормальных напряжений от действия сжимающей силы $N = F$.

Величина внутреннего изгибающего момента относительно нейтральной оси (оси Y_M) определяется соотношением:

$$M_y = \int\limits_{A_1} \sigma_1^M x_1 dA + \int\limits_{A_2} \sigma_2^M x_2 dA + \int\limits_{A_{n-1}^M} \sigma_{n-1}^M x_{n-1} dA + \int\limits_{A_n^M} \sigma_n^M x_n dA =$$
$$= \frac{E_1}{\rho} I_{1y_M} + \frac{E_2}{\rho} I_{2y_M} + \dots + \frac{E_{n-1}}{\rho} I_{(n-1)y_M} + \frac{E_n}{\rho} I_{ny_M}. \tag{10}$$

Здесь $M_y = F \cdot x_F$ – изгибающий момент от действия внешней силы F;

$I_{iy_M},\ i = 1, 2, \dots, n$ – осевые моменты инерции поперечных сечений каждого слоя относительно нейтральной оси Y_M.

Из соотношения (10) определяем кривизну изогнутой оси внецентренно сжатого многослойного стержня:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI}. \tag{11}$$

здесь $EI = E_1 I_{1y_M} + E_2 I_{2y_M} + \dots + E_{n-1} I_{(n-1)y_M} + E_n I_{ny_M}$. (12)

Исключая с помощью формулы (11) кривизну из соотношений (7), найдем нормальные напряжения σ_z^M в поперечных сечениях каждого слоя рассматриваемого стержня от действия только изгибающего момента:

$$\sigma_{1z}^M = E_1 \frac{M_y}{EI} x_1;\ \sigma_{2z}^M = E_2 \frac{M_y}{EI} x_2;\ \dots;\ \sigma_{nz}^M = E_n \frac{M_y}{EI} x_n. \tag{13}$$

Складывая нормальные напряжения σ_z^N и σ_z^M в каждой точке поперечного сечения рассматриваемого стержня, найдем полные нормальные напряжения σ_z:

$$\sigma_{1z} = \sigma_{1z}^N + \sigma_{1z}^M;\ \sigma_{2z} = \sigma_{2z}^N + \sigma_{2z}^M;\ \dots;\ \sigma_{nz} = \sigma_{nz}^N + \sigma_{nz}^M. \tag{14}$$

После построения эпюры нормальных напряжений σ_z оценивается прочность каждого слоя рассматриваемого многослойного неоднородного внецентренно сжатого упругого стержня. По наиболее нагруженному слою можно судить о несущей способности стержня.

Пример. В качестве примера рассмотрим трехслойный массивный упругий стержень (рис. 3), находящийся в условиях внецентренного сжатия. Сила F приложена в центре тяжести поперечного сечения третьего слоя.

Исходные данные:
$E_1 = 40000$ МПа – гранит;
$E_2 = 300$ МПа – кирпичная кладка;
$E_3 = 20000$ МПа – бетон.
$\gamma_1 = 27 \cdot 10^{-6}$ кН/см^3; $\gamma_2 = 22 \cdot 10^{-6}$ кН/см^3;
$\gamma_3 = 24 \cdot 10^{-6}$ кН/см^3;
$b_1 = 5$ см; $b_2 = 25$ см; $b_3 = 10$ см; $h = 20$ см; $F = 100$ кН.
Далее имеем:
$A_1 = hb_1 = 100$ см^2; $A_2 = hb_2 = 500$ см^2; $A_3 = hb_3 = 200$ см^2.

Определяем центр тяжести поперечного сечения стержня во вспомогательной системе координат $\tilde{X}, \tilde{Y}$:

$$y_c = 0;\ \ x_c = \frac{\gamma_1 \frac{b_1}{2} A_1 + \gamma_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) A_2 + \gamma_3 \left(b_1 + b_2 + \frac{b_3}{2}\right) A_3}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3} = 19{,}85 \text{ см}.$$

По формулам (4) вычисляем нормальные напряжения σ_z^N:

$$\sigma_{1z}^N = -\frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}} \frac{1}{A_1} = -2{,}963 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2z}^N = -\frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}} \frac{E_2}{E_1 A_1} = -0{,}222 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3z}^N = -\frac{F}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}} \frac{E_3}{E_1 A_1} = -1{,}481 \text{ МПа}.$$

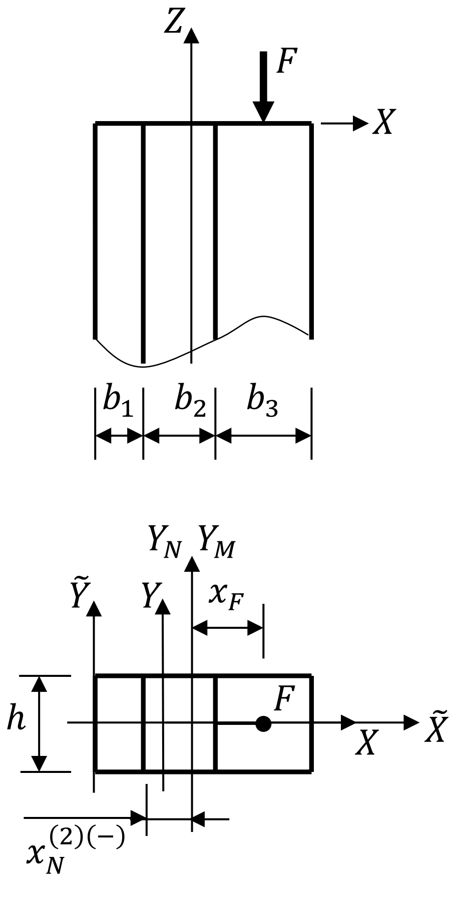

Рис. 3. Трехслойный упругий массивный стержень

Предположим, что ось Y_N проходит в пределах площади поперечного сечения второго слоя. Тогда, в соответствии с формулами (6), получим:

$$S_{1y_N} = -A_1 \cdot \left(\frac{b_1}{2} + x_N^{(2)(-)}\right);$$

$$S_{2y_N}^{(-)} = -hx_N^{(2)(-)} \cdot \frac{x_N^{(2)(-)}}{2};$$

$$S_{2y_N}^{(+)} = h\left(b_2 - x_N^{(2)(-)}\right) \times \frac{\left(b_2 - x_N^{(2)(-)}\right)}{2};$$

$$S_{3y_N} = A_3 \cdot \left(b_2 - x_N^{(2)(-)} + \frac{b_3}{2}\right).$$

Решая уравнение (5),

$$\sigma_{1z}S_{1y_N} + \sigma_{2z}S_{2y_N}^{(-)} + \sigma_{2z}S_{2y_N}^{(+)} + \sigma_{3z}S_{3y_N} = 0,$$

найдем:

$$x_N^{(2)(-)} = \frac{-\sigma_{1z}A_1\frac{b_1}{2} + \sigma_{2z}A_2\frac{b_2}{2} + \sigma_{3z}A_3\left(b_2 + \frac{b_3}{2}\right)}{\sigma_{1z}A_1 + \sigma_{2z}A_2 + \sigma_{3z}A_3} = 13{,}553 \text{ см}.$$

Так как $x_N^{(2)(-)} = 13{,}553 \text{ см} < b_2 = 25 \text{ см}$, то положение оси Y_N определено верно.

Следовательно, $x_F = \frac{b_3}{2} + b_2 - x_N^{(2)(-)} = 16{,}447 \text{ см}$.

Тогда $M_y = -F \cdot x_F = -1644{,}737 \text{ кН} \cdot \text{см}$.

Вычисляем положение нейтральной оси Y_M от действия только изгибающего момента. Величина статических моментов в формуле (8), полагая, что нейтральная линия Y_M проходит внутри площади поперечного сечения второго слоя, равна:

$$S_{1y_M} = A_1 \cdot \left(\frac{b_1}{2} + x_M^{(2)(-)}\right);$$

$$S_{2y_M}^{(-)} = hx_M^{(2)(-)} \cdot \frac{x_M^{(2)(-)}}{2};$$

$$S_{2y_M}^{(+)} = h\left(b_2 - x_M^{(2)(-)}\right) \cdot \frac{\left(b_2 - x_M^{(2)(-)}\right)}{2};$$

$$S_{3y_M} = A_3 \cdot \left(b_2 - x_M^{(2)(-)} + \frac{b_3}{2}\right).$$

Решая уравнение (8),

$$E_1S_{1y_M} + E_2S_{2y_N}^{(-)} - E_2S_{2y_N}^{(+)} - E_3S_{3y_M} = 0.$$

находим положение оси Y_M:

$$x_M^{(2)(-)} = \frac{-E_1A_1 + E_2A_2\frac{b_2}{2} + E_3A_3\left(b_2 + \frac{b_3}{2}\right)}{E_1A_1 + E_3A_3 + E_2A_2} = 13{,}553 \text{ см}.$$

Таким образом, оси Y_N и Y_M совпадают.

Вычисляем осевые моменты инерции поперечных сечений каждого слоя относительно нейтральной оси Y_M.

$$I_{1y_M} = \frac{b_1h^3}{12} + A_1\left(\frac{b_1}{2} + x_M^{(2)(-)}\right)^2 = 29102{,}031 \text{ см}^4;$$

$$I_{2y_M}^{(-)} = \frac{x_M^{(2)(-)}h^3}{12} + hx_M^{(2)(-)}\left(\frac{x_M^{(2)(-)}}{2}\right)^2 = 21481{,}406 \text{ см}^4;$$

$$I_{2y_M}^{(+)} = \frac{\left(b_2 - x_M^{(2)(-)}\right)h^3}{12} + h\left(b_2 - x_M^{(2)(-)}\right)\frac{\left(b_2 - x_M^{(2)(-)}\right)^2}{4} = 37633{,}356 \text{ см}^4;$$

$$I_{3y_M} = \frac{b_3 h^3}{12} + A_3 \left(\frac{b_3}{2} + b_2 - x_M^{(2)(-)}\right)^2 = 60769{,}852\ \text{см}^4.$$

По формуле (12) вычисляем жесткость стержня:

$$EI = E_1 I_{1y_M} + E_2 I_{2y_M}^{(-)} + E_2 I_{2y_M}^{(+)} + E_3 I_{3y_M} = 2{,}55682 \cdot 10^8\ \text{кН} \cdot \text{см}^2.$$

По формулам (13) вычисляем нормальные напряжения от изгибающего момента:

$$\sigma_{1z}^M = E_1 \frac{M_y}{EI} x_1, \text{ где } -\left(b_1 + x_M^{(2)(-)}\right) \le x_1 \le -x_M^{(2)(-)};$$

$$\sigma_{2z}^{M(-)} = E_2 \frac{M_y}{EI} x_2^{(-)}, \text{ где } -x_M^{(2)(-)} \le x_2^{(-)} \le 0;$$

$$\sigma_{2z}^{M(+)} = E_2 \frac{M_y}{EI} x_2^{(+)}, \text{ где } 0 \le x_2^{(+)} \le b_2 - x_M^{(2)(-)};$$

$$\sigma_{3z}^M = E_3 \frac{M_y}{EI} x_3, \text{ где } b_2 - x_M^{(2)(-)} \le x_3 \le b_2 - x_M^{(2)(-)} + b_3.$$

Вычисляем полные нормальные напряжения в каждой точке поперечного сечения стержня:

$$\sigma_{1z} = \sigma_{1z}^N + \sigma_{1z}^M = \sigma_{1z}^N + E_1 \frac{M_y}{EI} x_1;$$

$$\sigma_{2z}^{(-)} = \sigma_{2z}^N + \sigma_{2z}^{M(-)} = \sigma_{2z}^N + E_2 \frac{M_y}{EI} x_2^{(-)};$$

$$\sigma_{2z}^{(+)} = \sigma_{2z}^N + \sigma_{2z}^{M(+)} = \sigma_{2z}^N + E_2 \frac{M_y}{EI} x_2^{(+)};$$

$$\sigma_{3z} = \sigma_{3z}^N + \sigma_{3z}^M = \sigma_{3z}^N + E_3 \frac{M_y}{EI} x_3.$$

Расчеты и визуализация эпюры напряжений σ_z показывают, что нейтральная линия поперечного сечения стержня $Y_н$ располагается в пределах площади поперечного сечения второго слоя слева от оси Y_M. Следовательно, приравнивая напряжение $\sigma_{2z}^{(-)}$ нулю, определяем положение нейтральной линии $Y_н$ относительно оси Y_M:

$$\sigma_{2z}^{(-)} = \sigma_{2z}^N + E_2 \frac{M_y}{EI} x_{н.л.} = 0,$$

то есть $x_{н.л.} = -\frac{\sigma_{2z}^N \cdot EI}{E_2 \cdot M_y} = -11{,}515$ см.

Эпюра нормальных напряжений σ_z показана на рис. 4.

Данный расчет показывает, что методом численного подбора возможно найти такое положение точки приложения внешней силы F, при котором нейтральная линия, то есть ось $Y_н$, будет располагаться за пределами контура поперечного сечения многослойного разнородного стержня, что обеспечит напряжения одного знака в пределах поперечного сечения.

Для оценки несущей способности стержня оцениваем прочность наиболее нагруженных слоев – первого и третьего.

Пусть заданы расчетные сопротивления материала слоев стержня:

$$R_{1\sigma}^{(+)} = 0{,}25\ \text{МПа};\ R_{1\sigma}^{(-)} = 4\ \text{МПа};\ R_{2\sigma}^{(+)} = 0{,}05\ \text{МПа};$$

$$R_{2\sigma}^{(-)} = 3{,}5\ \text{МПа};\ R_{3\sigma}^{(+)} = 1{,}35\ \text{МПа};\ R_{3\sigma}^{(-)} = 15\ \text{МПа}.$$

Тогда

$$\sigma_{1z}^{max} = 1{,}81\ \text{МПа} > R_{1\sigma}^{(+)} = 0{,}25\ \text{МПа},$$

$$\sigma_{3z}^{max} = 4{,}241\ \text{МПа} < R_{3\sigma}^{(-)} = 15\ \text{МПа}.$$

Итак, в нашем случае прочность по первому слою не обеспечена, прочность по третьему слою обеспечена.

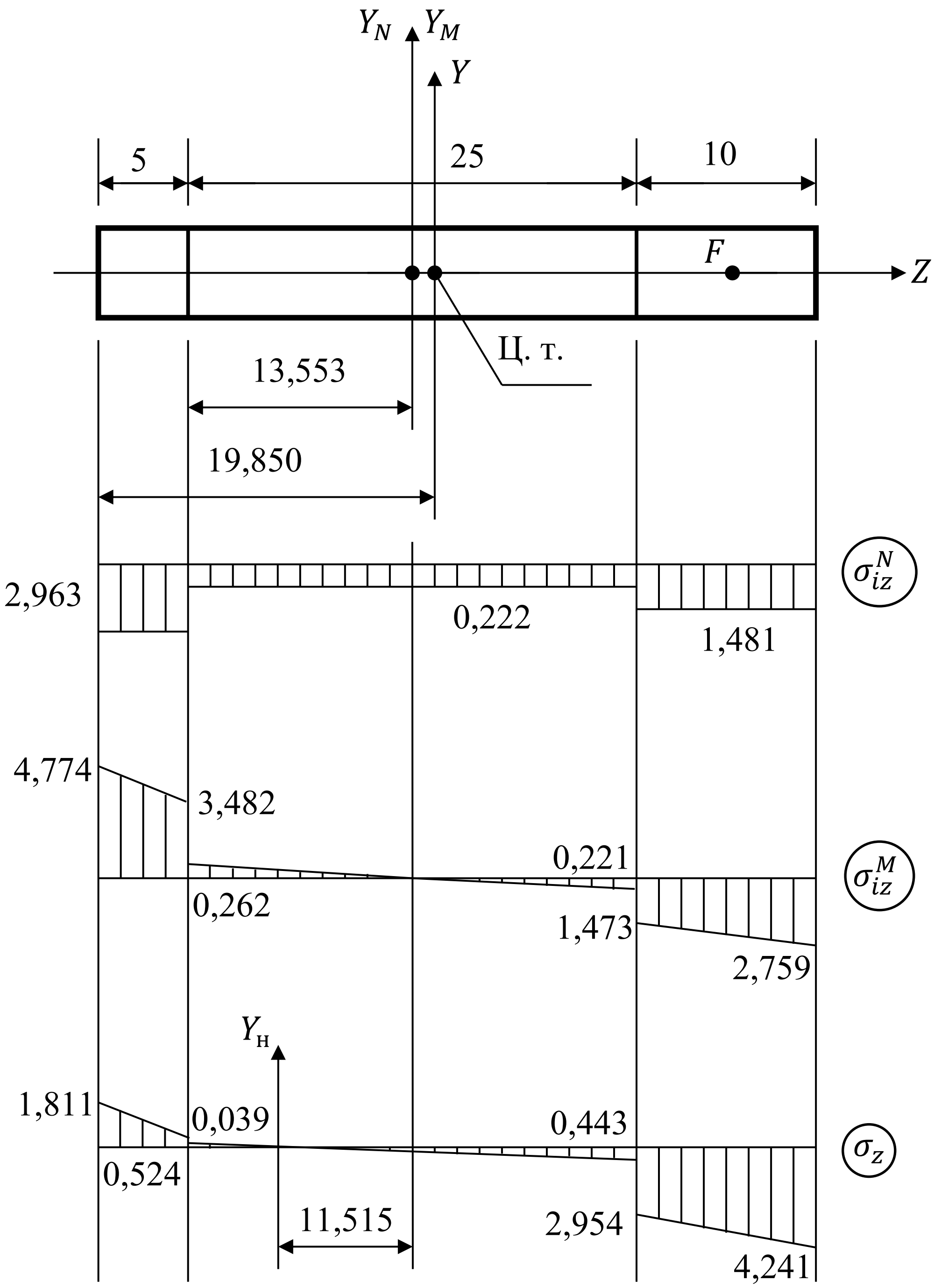

Рис. 4. Эпюра нормальных напряжений σ_z

Выводы

1. При построении эпюры нормальных напряжений в многослойном неоднородном упругом внецентренно нагруженном стержне в качестве точки

приведения силы F следует брать не центр тяжести сечения, а точку приложения равнодействующей внутренних продольных сил в каждом слое. В этом случае рассматриваемый стержень будет находиться в условиях осевого сжатия от продольной силы $N = F$ и изгиба от изгибающего момента $M_y = F \cdot x_F$.

2. Оценку несущей способности многослойного неоднородного упругого внецентренно нагруженного стержня следует выполнять по наиболее нагруженному слою.

Заключение

Полученные в статье результаты могут быть использованы при проектировании прямолинейных упругих неоднородных многослойных внецентренно нагруженных стоек зданий и сооружений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под редакцией А. В. Александрова. – 6-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2008. – 560 с. : ил. – ISBN 978-5-06-003732-6. – Текст : непосредственный.
2. Маилян, Д. Р. Экологические и экономические преимущества слоистых железобетонных панелей с комбинированным армированием / Д. Р. Маилян, Л. Д. Маилян. – Текст : непосредственный // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2016. – № 44-2 (63). – С. 86–93.
3. Горынин, Г. Л. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния внецентренно сжатых предварительно напряженных трубобетонных стоек / Г. Л. Горынин, В. А. Снигирева. – Текст : электронный // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2020. – № 11 (743). – С. 5–17. – DOI: 10.32683/0536-1052-2020-743-11-5-17.
4. Донченко, О. М. Сопротивление коротких бетонных элементов внецентренному сжатию с большими эксцентриситетами / О. М. Донченко. – Текст : непосредственный // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. – 2022. – № 4. – С. 49–56. – DOI: 10.34031/2071-7318-2021-7-4-49-56.
5. Лазовский, Д. Н. Общий метод расчета прочности и деформаций на основе нелинейной деформационной модели косо сжатых колонн, усиленных железобетонной обоймой / Д. Н. Лазовский, Д. О. Глухов, Е. Д. Лазовский. – Текст : электронный // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2021. – № 16. – С. 72–79. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obschiy-metod-rascheta-prochnosti-i-deformatsiy-na-osnove-nelineynoy-deformatsionnoy-modeli-koso-szhatyh-kolonn-usilennyh/viewer.
6. Резникова, Т. О. Усиление железобетонных конструкций композитными материалами (сетками) / Т. О. Резникова. – Текст : электронный // Перспективы науки. – 2022. – № 2 (149). – С. 34–40. – URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_48408099_83507821.pdf.
7. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики. В двух томах. Том 1. Статика и кинематика / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 3-е изд., стереотип. – Москва : Наука, 1979. – 272 с. – Текст : непосредственный.
8. Бакушев, С. В. К вопросу об осевом растяжении-сжатии неоднородных упругих стержней / С. В. Бакушев, М. И. Шереметьева. – Текст : непосредственный // Моделирование и механика конструкций. – 2024. – № 20. – С. 89–105.
9. Бакушев, С. В. Осевое растяжение-сжатие упругих стержней, содержащих n-неоднородностей / С. В. Бакушев. – Текст : непосредственный // Моделирование и механика конструкций. – 2024. – № 20. – С. 71–81.

BAKUSHEV Sergey Vasilevich, doctor of technical sciences, professor of the chair of mechanics

ECCENTRIC COMPRESSION OF A MASSIVE INHOMOGENEOUS ROD

Penza State University of Architecture and Construction.
28, German Titov St., Penza, 440028, Russia. Tel.: (8412) 49-72-77, e-mail: office@pguas.ru
Key words: rod, heterogeneity, elasticity, out-of-center compression.

The article discusses the eccentric compression of a massive multilayer inhomogeneous elastic rod with a cross-section symmetrical with respect to one of the main central axes of inertia of the cross-section.

REFERENCES

1. Aleksandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. Soprotivlenie materialov [Theory of Strength of Materials]: ucheb dlya vuzov. 6-e izd., ster., Moscow, Vysshaya. Shkola, 2008, 560 p., il.

2. Mailyan D. R., Mailyan L. D. Ekologicheskie i ekonomicheskie preimushchestva sloistykh zhelezobetonnykh panely s kombinirovannym armirovaniem. [Environmental and economic advantages of layered reinforced concrete panels with combined reinforcement] Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitelnogo universiteta. Seriya: Stroitelstvo i arkhitektura [Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture]. 2016, № 44-2(63), P. 86-93.

3. Gorynin G. L., Snigireva V. A. Matematicheskoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya vnecentrenno szhatykh predvaritelno napryazhennykh trubobetonnykh stoek. [Mathematical modeling of the stress-strain state pre-stressed concrete-filled steel tube column under eccentric compression] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitelstvo [News of Universities. Construction]. 2020, № 11(743), P. 5-17. DOI: 10.32683/0536-1052-2020-743-11-5-17.

4. Donchenko O. M. Soprotivlenie korotkikh betonnykh elementov vntsentrennomu szhatiyu s bolshimi ekstsentricitetami [Resistance of short concrete elements to eccentric compression with large eccentricities]. Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova [Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov]. 2022, № 4, P. 49–56. DOI: 10.34031/2071-7318-2021-7-4-49-56.

5. Lazovsky D. N., Glukhov D. O., Lazovsky E. D. Obshchiy metod rascheta prochnosti i deformatsiy na osnove nelineynoy deformatsionnoy modeli koso szhatykh kolonn, usilennykh zhelezobetonnoy oboymoy [General method for calculating the strength and deformations based on a nonlinear deformation model of obliquely compressed columns reinforced with a reinforced concrete jacket]. Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya F. Stroitelstvo. Prikladnye nauki [Vestnik of Polotsk State University. Part F. Constructions. Applied Sciences]. 2021, № 16, P. 72–79. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obschiy-metod-rascheta-prochnosti-i-deformatsiy-na-osnove-nelineynoy-deformatsionnoy-modeli-koso-szhatyh-kolonn-usilennyh/viewer.

6. Reznikova T. O. Usilenie zhelezobetonnykh konstruktsiy kompozitnymi materialami (setkami) [Strengthening of reinforced concrete structures with composite materials (grids)]. Perspektivy nauki [Science Prospects]. 2022, № 2 (149), P. 34–40. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_48408099_83507821.pdf.

7. Butenin N. V., Lunts Ya. L., Merkin D. R. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Statika i kinematika [Course of Theoretical Mechanics. Statics and Kinematics]. v dvukh tomakh. Tom 1., 3rd ed., stereotype. Moscow, 1979, Vol. 1., Nauka, 272 p.

8. Bakushev S. V., Sheremeteva M. I. K voprosu ob osevom rtyazhenii-szhatii neodnorodnykh uprugikh sterzhney [On the issue of axial tension-compression of inhomogeneous elastic rods]. Modelirovanie i mekhanika konstruktsiy [Modeling and Mechanics of Structures]. 2024, № 20, P. 89–105.

9. Bakushev S. V. Osevoe rtyazhenie-szhatie uprugikh sterzhney, soderzhashchikh n-neodnorodnostey [Axial tension-compression of elastic rods containing n-inhomogeneities]. Modelirovanie i mekhanika konstruktsiy [Modeling and Mechanics of Structures]. 2024, № 20, P. 71–81.

Получено: 07.04.2025 г.