

УДК 519.633

С. В. БАКУШЕВ, д-р техн. наук, проф. кафедры механики

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ИДЕАЛЬНО
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ
ДИАГРАММ ОБЪЕМНОГО И СДВИГОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ
Часть 1**

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства»
Россия, 440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, д. 28. Тел./факс: (8412) 49-72-77;
e-mail: office@pguas.ru

Ключевые слова: сплошная среда, осесимметричная деформация, квадратичная аппроксимация, дифференциальные уравнения равновесия, геометрическая линейность.

Получены дифференциальные уравнения равновесия геометрически линейной, но физически нелинейной идеально упругопластической сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, при аппроксимации диаграмм объемного и сдвигового деформирования квадратичными функциями.

Введение. Строительные материалы и изделия из них проявляют как упругие свойства при малых уровнях внешних нагрузок, так и пластические, если внешние воздействия значительны. Следствием пластических свойств материалов и изделий является появление в них остаточных деформаций при снятии внешнего воздействия.

Одной из наиболее важных и значимых теорий, описывающих деформирование конструкций с учетом пластических свойств материала, является теория идеальной пластичности Прандтля. В этом случае диаграмма растяжения описывается билинейной функцией, в соответствии с которой первый (начальный) участок диаграммы является прямолинейным, наклоненным к оси деформаций под некоторым углом, а второй участок параллелен оси деформаций.

Мы будем рассматривать материал, механические свойства которого, без учета геометрической нелинейности, характеризуются тем, что зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций и зависимость между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций описывается некоторыми нелинейными функциями, причем на диаграмме сдвиговых деформаций наблюдается участок, близкий к площадке текучести.

Задачи расчета конструкций с учетом пластических деформаций, по сути, являются задачами, в которых напряженно-деформированное состояние определяется с учетом реальных свойств материалов, а потому интерес к ним не только не ослабевает, но и существенно растет. Этот интерес подогревается еще и тем, что физический процесс пластических деформаций является достаточно сложным и до конца еще не исследованным. В работе [1] для осесимметричной задачи теории пластического течения сформулирована полная система определяющих уравнений. Выявлена сложность и малая изученность осесимметричной задачи теории пластичности. В статье [2] анализируются



результаты экспериментальных исследований деформационных свойств неоднородных материалов и изучены основные закономерности их поведения. Рассмотрены возможные варианты определяющих соотношений, учитывающих зависимость свойств рассматриваемых сред от условий нагружения или условий деформирования, а также взаимосвязь сдвиговых и объемных деформаций. Показано, что при этом при кручении цилиндра круглого поперечного сечения депланация сечения не происходит, как и в классическом решении, но распределения перемещений, деформаций и напряжений существенным образом отличаются от известных решений. В работе [3] анализируются свойства определяющих соотношений теории деформирования физически нелинейных материалов неоднородной структуры с зависящими от вида напряженного состояния свойствами. Учтены две формы нелинейности, одна из которых связана с нелинейностью диаграмм деформирования, а другая – с изменением этих диаграмм в зависимости от условий нагружения. Изучению влияния неоднородности структуры конструкционных материалов на их деформационные, пластические и прочностные свойства посвящены работы многих зарубежных авторов [4, 5, 6, 7, 8]. Эти материалы обладают значительной объемной сжимаемостью при пластическом деформировании, упрочнением, эффектом дилатансии, взаимосвязью процессов сдвигового и объемного деформирования. В статье [9] описывается деформационное поведение водонасыщенных глинистых грунтов при трехосном циклическом нагружении на основе структурно неоднородной упругопластической расчетной модели. Показано, что расчетные диаграммы сдвигового и объемного деформирования этой модели удовлетворительно соответствуют экспериментальным диаграммам деформирования реальных грунтов. В работе [10] для физически нелинейно-пластического тела на основе деформационной теории пластичности Кулона и Ставрогина рассмотрено напряженно-деформированное состояние вокруг выработки кругового очертания, сооружаемой в массиве с начальным гидростатическим полем напряжений. Показано, что учет нелинейности в массиве приводит к снижению размера области предельного состояния вокруг выработки. В работе [11] ставится задача о построении системы дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для определения осесимметричных деформаций тела, образованного вращением некоторой произвольной области вокруг оси симметрии Z . Тело выполнено из материалов, обладающих изотропными, трансверсально изотропными и в общем случае ортотропными свойствами, а также физической неоднородностью и испытывающим статические осесимметричные нагрузки и другие воздействия. В статье [12] получены аналитические выражения для компонент напряжений, а также уравнение для определения формы и размера границы раздела зон упругого и пластического деформирования в неограниченном полупространстве вблизи цилиндрической полости с некруговой формой поперечного сечения. В качестве модели материала пространства использовалась модель среды, учитывающая стареющие упруговязкопластические свойства. В работе [13] затрагиваются вопросы выбора математических моделей при статических и сейсмических расчетах напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин с использованием программно-математического обеспечения персональных компьютеров. Для моделирования грунтовых, нелинейно деформируемых массивов программными комплексами используются различные варианты моделей, основанных на гиперболической

зависимости между напряжениями и деформациями [14, 15, 16]. В статье [17] решаются две задачи для плоской конструкции, выполненной из идеально пластичного материала: в первой, зная внешние нагрузки, определяются смещения точек конструкции; во второй – по заданным смещениям плоской конструкции определяются приложенные к конструкции силы.

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объемных деформаций сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования:

$u_r = u(r)$, $u_\varphi = 0$, $u_z = 0$, при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида квадратичными функциями для геометрически линейной модели сплошной среды (рис. 1).

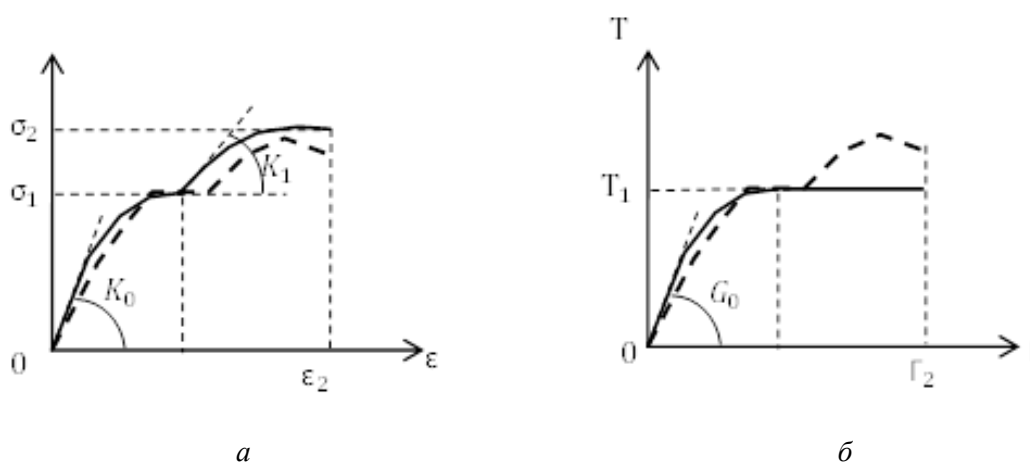


Рис. 1: а – диаграмма $\sigma - \varepsilon$; б – диаграмма $T - \Gamma$.

Пунктирные толстые линии – исходные кривые объемного и сдвигового деформирования; сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол

Построение дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объемных деформаций сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования:

$$u_r = u(r), u_\varphi = 0, u_z = 0$$

при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида билинейными функциями [18] как для геометрически линейной, так и для геометрически нелинейной модели сплошной среды, выполнено в работе [19].

Построение физических уравнений для геометрически линейной модели. В соответствии с работой [20] секущие модули объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ на первом криволинейном участке диаграмм $\sigma - \varepsilon$ и $T - \Gamma$ (рис. 1) будут определяться выражениями:

$$K^I(\varepsilon) = \frac{1}{3}K_0 + K_{01}\varepsilon; \quad G^I(\Gamma) = G_0 + G_{01}\Gamma, \quad (1)$$

$$\text{где } K_{01} = \frac{\sigma_1 - K_0\varepsilon_1}{3\varepsilon_1^2}; \quad G_{01} = \frac{T_1 - G_0\Gamma_1}{\Gamma_1^2}. \quad (2)$$



На втором криволинейном участке диаграмм $\sigma - \varepsilon$ и $T - \Gamma$ секущий модуль объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и секущий модуль сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ будут вычисляться по формулам:

$$K''(\varepsilon) = a_1 \varepsilon + b_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}; \quad G''(\Gamma) = \frac{T_1}{\Gamma}, \quad (3)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}; \quad b_1 = \frac{1}{3} \left[K_1 - 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1 \right];$$

$$c_1 = \frac{1}{3} \left[\sigma_1 - K_1 \varepsilon_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1^2 \right]. \quad (4)$$

В формулах (2) и (4) обозначено: K_0 – начальный модуль объемного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – начальный модуль упрочнения при объемном расширении (сжатии); $G_1 = 0$ – начальный модуль упрочнения при сдвиге; σ_1, ε_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma - \varepsilon$; T_1, Γ_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T - \Gamma$; σ_2, ε_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma - \varepsilon$; $T_2 = T_1, \Gamma_2$ – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T - \Gamma$.

Кроме того, σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

При осесимметричном деформировании $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$ и

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2}, \text{ то есть}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \text{ причем } \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right);$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial r} = \frac{2}{3\Gamma} \left[(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right] =$$

$$= \frac{2}{3\Gamma} \left[\left(2 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(2 \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \right].$$

Поскольку построение диаграмм объемного и сдвигового деформирования выполняется независимо друг от друга, то рассмотрим пять основных случаев физических зависимостей, зависящих от взаимного расположения точек излома графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования.

Случай 1: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть диаграммы и объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждая, имеют точки излома графиков.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования совпадают, то есть $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$. При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (5)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1, \quad (6)$$

где интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что

$$|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}| = |\varepsilon_1|. \quad (7)$$



Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| < |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (8)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2} = \Gamma_1. \quad (9)$$

В этом случае физические уравнения осесимметричного деформирования с учетом формул (1) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{zz} &= \left[K^I(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^I(\Gamma)\right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

Случай 2: $\left.\frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left.\frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma}\right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть диаграммы и объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждая, имеют точки излома графиков.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| \text{ и } \Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1, \quad (11)$$

где объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (9), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения осесимметричного деформирования с учетом формул (1) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{zz} &= \left[K^{II}(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^I(\Gamma)\right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

Случай 3: $\left.\frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left.\frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma}\right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть диаграммы и объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждая, имеют точки излома графиков.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0, \quad (13)$$

где объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (9), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения осесимметричного деформирования с учетом формул (1) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^{II}(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^{II}(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{zz} &= \left[K^I(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^{II}(\Gamma)\right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$



Случай 4: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть диаграммы и объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболоми каждая, имеют точки излома графиков.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования совпадают, то есть $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (15)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon| \geq \varepsilon_0 \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (16)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (9).

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$. При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_0, \quad (17)$$

где интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения осесимметричного деформирования с учетом формул (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^{II}(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^{II}(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\ \sigma_{zz} &= \left[K^{II}(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^{II}(\Gamma) \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

Случай 5: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = K_1$, $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть точка излома графика на квадратичной диаграмме $\sigma - \varepsilon$ отсутствует. При этом, если $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$, то физические уравнения осесимметричного деформирования будут иметь вид (10); если $\Gamma \geq \Gamma_1$, то физические уравнения осесимметричного деформирования будут иметь вид (14).

Построение дифференциальных уравнений для геометрически линейной модели. Подставляя физические уравнения (10), (12), (14), (18) в дифференциальное уравнение равновесия осесимметричного деформирования сплошной среды:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + F_r = 0, \quad (19)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B + F_r = 0. \quad (20)$$

Коэффициенты A и B в уравнении (20) зависят от вида физических уравнений.

1) Для физических уравнений (10):

$$\begin{aligned} A &= K^I(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon + \frac{4}{3}G^I(\Gamma) + \frac{4G_{01}}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right); \\ B &= \left[K^I(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon - \frac{2}{3}G^I(\Gamma) \right] \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{4G_{01}}{3\Gamma r} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \times \\ &\quad \times \left(2\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{2}{r}G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi} \right). \end{aligned} \quad (21)$$



2) Для физических уравнений (12):

$$A = K^{II}(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2}\right)\varepsilon + \frac{4}{3}G^I(\Gamma) + \frac{4G_{01}}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right);$$

$$B = \left[K^{II}(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2}\right)\varepsilon - \frac{2}{3}G^I(\Gamma)\right] \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \frac{4G_{01}}{3\Gamma r} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \times$$

$$\times \left(2\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \frac{2}{r}G^I(\Gamma) \cdot (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (22)$$

3) Для физических уравнений (14):

$$A = K^I(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon + \frac{4}{3}G^{II}(\Gamma) - \frac{4T_1}{3\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right);$$

$$B = \left[K^I(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon - \frac{2}{3}G^{II}(\Gamma)\right] \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) - \frac{4T_1}{3\Gamma^3 r} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \times$$

$$\times \left(2\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \frac{2}{r}G^{II}(\Gamma) \cdot (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (23)$$

4). Для физических уравнений (18):

$$A = K^{II}(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2}\right)\varepsilon + \frac{4}{3}G^{II}(\Gamma) - \frac{4T_1}{3\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right);$$

$$B = \left[K^{II}(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2}\right)\varepsilon - \frac{2}{3}G^{II}(\Gamma)\right] \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) - \frac{4T_1}{3\Gamma^3 r} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \times$$

$$\times \left(2\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) + \frac{2}{r}G^{II}(\Gamma) \cdot (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (24)$$

В формулах (21) – (24):

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{u}{r} + \left(\frac{u}{r}\right)^2}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения в перемещениях для осесимметричного деформирования идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейно-упругой в отношении объемных деформаций сплошной среды при квадратичной аппроксимации замыкающих уравнений, без учета геометрической нелинейности, построены.

Заключение. Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейно-упругой в отношении объемных деформаций сплошных сред, находящихся в условиях осесимметричного деформирования, замыкающие уравнения физических соотношений, для которых описываются квадратичными функциями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Воронцов, А. Л. Пластические задачи в технологии металлов. Осесимметричная задача. Часть 1. Определяющие уравнения и состояние вопроса / А. Л. Воронцов, Ю. Х. Хациев. – Текст : электронный // Справочник. Инженерный журнал с приложением. – 2018. – № S1. – С. 9–18. – DOI: 10.14489/hb.suppl.2018.01. P. 009–018.
2. Ломакин, Е. В. Кручение цилиндрических тел с изменяющимися деформационными свойствами. – Текст : непосредственный // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 217–226.
3. Ломакин, Е. В. Напряжения и деформации в диске из физически нелинейного материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами / Е. В. Ломакин, О. П. Щендригина. – Текст : электронный // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 4. – С. 25–33. – DOI: 10.31857/S0572329920040091.

4. Cazacu, O. Analytic plastic potential for porous aggregates with matrix exhibiting tension-compression asymmetry / O. Cazacu, J. Stewart, J. Mech // Phys. Solids. – 2009. – Volume 57. – P. 325–341.
5. Pietruszczak, S. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor / S. Pietruszczak, Z. Mroz // Comput. Geotech. – 2000. – Volume 26. – P. 105–112.
6. Gao, Z. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials / Z. Gao, J. Zhao, Y. Yao // Int. J. Solid Struct. – 2010. – Volume 47. – P. 3166–3185.
7. Experiments and theory in strain gradient elasticity / D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong [et al.] // Phys. Solids. – 2003. – Volume 51. – P. 1477–1508.
8. McFarland A. W., Colton, J. S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors / A. W. McFarland, J. C. J. Colton // Micromech. Microeng. – 2005. – Volume 15. – P. 1060–1067.
9. Панов, С. И. Деформации глинистых грунтов при циклическом нагружении / С. И. Панов, А. Л. Гольдин. – Текст : непосредственный // Известия Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники им. Б. Е. Веденеева. – 2016. – Том 280. – С. 79–86.
10. Протосеня, А. Г. Физически нелинейно-пластическая задача о распределении напряжений вокруг выработки кругового очертания / А. Г. Протосеня. – Текст : непосредственный // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2014. – № 2. – С. 43–48.
11. Магдеев, У. Х. К математической постановке задачи об определении осесимметричных деформаций конструкций из неоднородно ортотропных материалов / У. Х. Магдеев, В. И. Морозов, Ю. В. Пухаренко. – Текст : электронный // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2016 году : сборник научных трудов РААСН / Российская академия архитектуры и строительных наук. – Москва, 2017. – Том 2. – С. 227–230. – DOI: 10.22337/9785432302212-2017-227-230.
12. Гоцев, Д. В. Напряженное состояние неограниченного пространства вблизи цилиндрической полости с некруговой формой поперечного сечения для стареющих упруго вязкопластических материалов / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Ю. Яковлев. – Текст : электронный // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 134–140. – DOI: 10.31857/S0572329920060082.
13. Ляпичев, Ю. П. Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин / Ю. П. Ляпичев. – Текст : электронный // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Том 16, № 4. – С. 261–270. – DOI: 10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270.
14. Benz, T. Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences / T. Benz. – Stuttgart, 2007. – 193 p.
15. Schanz, T. The hardening soil model : formulation and verification / T. Schanz, P. A. Vermeer, P. G. Bonnier // In beyond 200 in Computational Geotechnics. – 1999. – P. 281–296.
16. Roscoe, K. H. On the generalised stress-strain behaviour of ‘wet’ clay, Eng. Plasticity / K. H. Roscoe, J. B. Burland. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1968. – P. 585–609.
17. Щербакова, А. О. Расчет деформирования геометрически нелинейной плоской конструкции из идеально пластичного материала / А. О. Щербакова. – Текст : непосредственный // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математика. Механика. Физика. – 2014. – Том 6, № 2. – С. 35–39.
18. Бакушев, С. В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями / С. В. Бакушев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – № 2 (283). – С. 2–11.



19. Бакушев, С. В. Дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной деформации идеально упругопластического элемента конструкции при сложном напряженном состоянии / С. В. Бакушев. – Текст : непосредственный // Региональная архитектура и строительство. – 2020. – № 1(42). – С. 140–155.

20. Бакушев, С. В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями / С. В. Бакушев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 3 (290). – С. 2–14.

BAKUSHEV Sergey Vasilevich, doctor of technical sciences, professor of the chair of mechanics

**DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EQUILIBRIUM OF IDEALLY
ELASTOPLASTIC CONTINUOUS MEDIUM FOR AXIALLY SYMMETRIC
DEFORMATION AT APPROXIMATION OF VOLUME AND SHEAR
DEFORMATION DIAGRAMS WITH QUADRATIC FUNCTIONS
PART 1**

The Penza State University of Architecture and Construction
28, German Titov St., Penza, 440028, Russia. Tel.: +7 (8412) 49-72-77;
e-mail: office@pguas.ru

Key words: continuum, axisymmetric deformation, quadratic approximation, differential equilibrium equations, geometric linearity.

In part 1 of the article, differential equilibrium equations of a geometrically linear, but physically nonlinear ideally elastoplastic continuous medium under conditions of axisymmetric deformation are obtained by approximation of volumetric and shear deformation diagrams by quadratic functions.

REFERENCES

1. Vorontsov A. L., Khatsiev Yu. Kh. Plasticheskie zadachi v tekhnologii metallov. Osesimmetrichnaya zadacha. Chast 1. Opredelyayushchie uravneniya i sostoyanie voprosa [Plastic problems in technology of metals. Axisymmetric problem. Part 1. Defining equations and status of the issue]. // Spravochnik. Inzhenerny zhurnal s prilozheniem [Information Book. Engineering magazine with supplement], 2018; № S1. – P. 9–18. DOI: 10.14489/hb.sup.2018.01. P. 009-018.

2. Lomakin E. V. Kruchenie tsilindricheskikh tel s izmenyayushchimisya deformatsionnymi svoystvami [Torsion of cylindrical bodies with varying strain properties] // Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tvordogo tela [News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2008; № 3. P. 217–226.

3. Lomakin E. V., Shchendrigina O. P. Napryazheniya i deformatsii v diske iz fizicheskii nelineynogo materiala s zavisyashchimi ot vida napryazhyonnogo sostoyaniya svoystvami [Stresses and strains in a disc made of a physically nonlinear material with properties dependent on the type of stress state] // Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tvordogo tela [News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2020; № 4. P. 25–33. DOI: 10.31857/S0572329920040091.

4. Cazacu O., Stewart J. Analytic plastic potential for porous aggregates with matrix exhibiting tension-compression asymmetry // J. Mech. Phys. Solids. 2009. Vol. 57. P. 325–341.

5. Pietruszczak S., Mroz Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor // Comput. Geotech. 2000. Vol. 26. P. 105–112.

6. Gao Z., Zhao J., Yao Y. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials // *Int. J. Solid Struct.* 2010. Vol. 47. P. 3166–3185.
7. Lam D. C. C., Yang F., Chong A. C. M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 2003. Vol. 51. P. 1477–1508.
8. McFarland A. W., Colton, J. S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // *J. Micromech. Microeng.* 2005. Vol. 15. P. 1060–1067.
9. Panov S. I., Goldin A. L. Deformatsii glinistykh gruntov pri tsiklicheskom nagruzenii [Deformation of clay soils with cyclic loading] // *Izvestiya Vserossiyskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta gidrotekhniki im. B. E. Vedeneeva* [The proceedings of the All-Russian Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering named after B.E. Vedeneev], 2016. Vol. 280. P. 79–86.
10. Protosenya A. G. Fizicheski nelineynno-plasticheskaya zadacha o raspredelenii napryazheniy vokrug vyrabotki krugovogo ochertaniya [Physically nonlinear-plastic problem of stress distribution around the circular outline of a working] // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gorny zhurnal* [The proceedings of higher educational institutions. Mining Magazine], 2014. № 2. P. 43–48.
11. Magdeev U. Kh., Morozov V. I., Pukhareno Yu. V. K matematicheskoy postanovke zadachi ob opredelenii osesimmetrichnykh deformatsiy konstruksiy iz neodnorodno ortotropnykh materialov [About setting up a mathematical problem of determining the axisymmetric deformations in designs made of heterogeneous orthotropic materials] // *Fundamentalnye, poiskovye i prikladnye issledovaniya RAASN po nauchnomu obespecheniyu razvitiya arkhitektury, gradostroitelstva i stroitelnoy otrasli Rossiyskoy Federatsii v 2016 godu* [Fundamental, exploratory and applied research of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences on scientific support for the development of architecture, urban planning and the construction industry of the Russian Federation in 2016] : sbornik nauchnykh trudov RAASN / *Ross. Akad. Arkhitektur. i Stroit. Nauk.* Moscow, 2017. Vol. 2. P. 227–230. DOI: 10.22337/9785432302212-2017-227-230.
12. Gotsev D. V., Kovalyov A. V., Yakovlev A. Yu. Napryazhyonnoe sostoyanie neogranichennogo prostranstva vblizi tsilindricheskoy polosti s nekrugovoy formoy poperechnogo csecheniya dlya stareyushchikh uprugo vyazkoplasticheskikh materialov [Stress state of unlimited space near a cylindrical cavity with a non-circular cross-sectional shape for aging elasto-viscoplastic materials] // *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tvyordogo tela* [News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 2020. № 6. P. 134–140. DOI: 10.31857/S0572329920060082.
13. Lyapichev Yu. P. Vybore matematicheskikh modeley gruntov v staticheskikh i seismicheskikh raschyotakh gruntovykh plotin [Choice of mathematic models of soils in static and seismic analyses of embankment dams] // *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2020. Vol. 16, № 4. P. 261–270. DOI: 10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270.
14. Benz T. Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences // *Stuttgart.* 2007. 193 p.
15. Schanz T., Vermeer P.A., Bonnier P. G. The hardening soil model: Formulation and verification // *In beyond 200 in Computational Geotechnics.* 1999. P. 281–296.
16. Roscoe K. H., Burland J. B. On the generalised stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Eng. Plasticity.* Cambridge Univ. Press, 1968. P. 585–609.
17. Scherbakova A. O. Raschyot deformirovaniya geometricheski nelineynoy ploskoy konstruksii iz idealno plastichnogo materiala [Calculation of deformation for geometrically nonlinear plane structure made of perfect plastic material] // *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika* [Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics]. 2014. Vol. 6, № 2. P. 35–39.
18. Bakushev S. V. Approksimatsiya diagramm deformirovaniya bilineynymi funktsiyami [Approximations of warp diagrams using bilinear functions]. *Stroitel'naya*



mekhanika i raschyot sooruzheniy [Structural mechanics and analysis of constructions]. 2019. № 2 (283). P. 2–11.

19. Bakushev S. V. Differentsialnye uravneniya ravnovesiya osesimmetrichnoy deformatsii idealno uprugoplasticheskogo elementa konstruktsii pri sloznom napryazhyonnom sostoyanii [Differential equations of equilibrium for the axially symmetric deformation of an ideally elasto-plastic structural element in complex stress state]. // Regionalnaya arkhitektura i stroitelstvo [Regional architecture and construction]. 2020. № 1(42). P. 140–155.

20. Bakushev S. V. Approksimatsiya diagramm deformirovaniya kvadraticnymi funktsiyami [Approximation of deformation diagrams by quadratic functions]. Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzheniy [Structural mechanics and analysis of constructions]. 2020. № 3 (290). P. 2–14.

© С. В. Бакушев, 2024

Получено: 22.02.2024 г.