

УДК 539.3+534.113

С. В. БАКУШЕВ, д-р техн. наук, проф. кафедры механики

**ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО
МНОГОСЛОЙНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ**

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства».
Россия, 440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, д. 28.

Тел./факс: (8412) 49-72-77; эл. почта: office@pguas.ru

Ключевые слова: стержень, неоднородность, упругость, продольные и поперечные колебания.

Рассматриваются продольные и поперечные колебания многослойного (со слоями, параллельными продольной оси стержня) неоднородного упругого прямолинейного стержня постоянного сечения. Определяются частоты собственных колебаний и периоды колебаний неоднородного стержня при продольных и поперечных колебаниях. Полученные в статье результаты могут быть использованы при проектировании многослойных неоднородных упругих прямолинейных стержней постоянного сечения, испытывающих динамические воздействия, с целью регулирования частоты собственных колебаний.

Введение

Изучение колебаний стержневых и континуальных систем имеет непосредственное прикладное значение, поскольку здания, и сооружения, и детали машин и механизмов зачастую испытывают значительные динамические воздействия. Вопросы колебания механических систем достаточно подробно изложены в классических монографиях ученых-механиков [1–8]. Вместе с тем изучение вопросов колебания механических (стержневых и континуальных) систем продолжает волновать умы современных исследователей. Так, в работе [9] найдены точные аналитические решения задачи о свободных и вынужденных гармонических колебаниях стержня-полосы, состоящего из двух участков по длине. Проведены численные эксперименты по определению собственных форм и частот изгибных колебаний, а также динамической реакции при резонансных колебаниях стержня-полосы. Материал стержня-полосы – однонаправленный волокнистый композит на основе углеленты ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. В статье [10] с использованием МКЭ решены задачи о свободных поперечных и продольных колебаниях стержневых сооружений: консольного стержня с распределенной массой и сооружения башенного типа (телевизионная башня). В работе [11] исследуются нестационарные продольные колебания упругого однородного и изотропного стержня конечной длины. Для описания движения стержня используется система уравнений общей модели моментных упругих тонких тел без дополнительных гипотез. В статьях [12, 13] исследуются продольные и изгибные колебания тонкого упругого стержня, управляемого посредством распределенной силы, которая приложена к отдельным участкам стержня с помощью пьезоактюаторов. Данная постановка позволяет решать задачи гашения колебаний. В работах [14, 15] рассматриваются продольные



свободные и вынужденные колебания однородного и континуально-дискретного вертикально стоящего стержня при сейсмических возмущениях. Определяются спектры собственных частот и собственные формы колебаний. Предложен и реализован метод определения дисперсии – наиболее важного параметра случайных колебаний. В статье [16] представлены результаты численного моделирования колебаний вертикально стоящего консольного упругого стержня под воздействием воздушного потока. Определены режимы колебаний в направлении набегающего потока и в поперечном направлении. Показано, что при близких значениях первой собственной частоты и частоты схода вихрей амплитуда колебаний стержня в поперечном направлении резко увеличивается до значения, приблизительно равного 0,06 высоты стержня, после чего устанавливается автоколебательный режим с постоянной амплитудой в поперечном направлении и переменной амплитудой в направлении набегающего потока. В работе [17] рассмотрена задача о продольных колебаниях стержня и поперечных колебаниях балки, выполненных из функционально-градиентных материалов, в частности, из ФГМ-керамики. Данная постановка позволяет оптимизировать первую собственную частоту колебаний за счет выбора закона изменения модуля упругости по толщине конструкции. В статье [18] приведены результаты исследования динамических характеристик различных типов зданий, представленных в виде модели слоистой системы, при сейсмическом воздействии. Полученные значения частот, периодов и форм колебаний сопоставлялись с пространственными конечно-элементными моделями и моделью сплошного консольного стержня. В работе [19] рассматривается задача определения частоты и формы собственных продольных и крутильных колебаний для стержня переменного сечения на основе теории возмущений. В статье [20] рассматривается математическая модель собственных поперечных колебаний балки Эйлера – Бернулли, опертой на упругое двухпараметрическое основание Пастернака с пятью каноническими граничными условиями (зашемления, шарниры, консоли двух типов и свободные концы). В работе [21] рассмотрены вопросы поиска аналитических зависимостей для динамических характеристик шарнирных ферм в зависимости от их топологии и геометрии.

В данной работе рассматриваются продольные и поперечные колебания многослойного (со слоями, параллельными продольной оси стержня) неоднородного упругого прямолинейного стержня постоянного сечения. Определяются частоты собственных колебаний и периоды колебаний неоднородного стержня при продольных и поперечных колебаниях.

Продольные колебания

Рассмотрим продольные колебания многослойного прямолинейного упругого стержня длиной l . Площади поперечных сечений слоев, параллельных продольной оси стержня Z , обозначим A_1, A_2, \dots, A_n ; модули упругости слоев обозначим E_1, E_2, \dots, E_n соответственно; плотность материала слоев обозначим соответственно $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$.

В состоянии до деформации выделим в стержне на расстоянии z от левого торца участок длиной dz , ограниченный сечениями 1-1 и 2-2 (рис. 1). Пусть в результате деформации сечение 1-1 получает перемещение $u(z, t)$ и сместится в положение 1'-1'. Тогда сечение 2-2 получит перемещение $u(z, t) + \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} dz$ и сместится в положение 2'-2'.

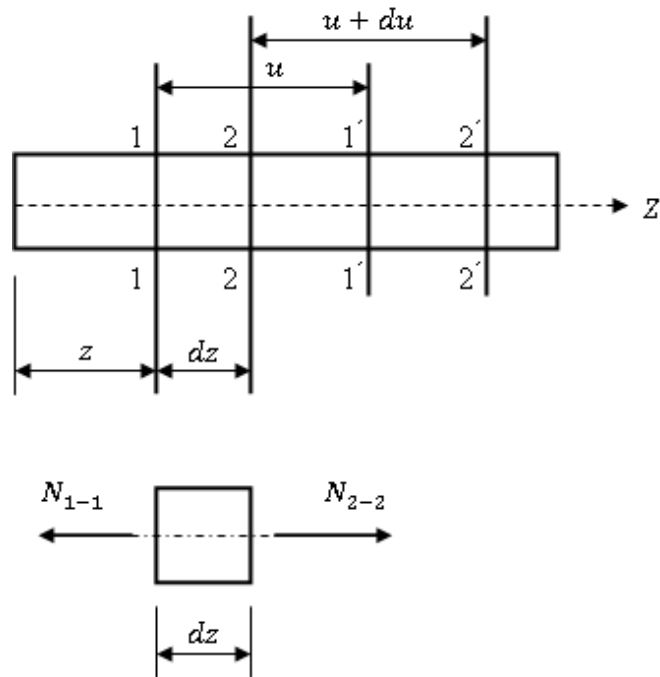


Рис. 1. Продольные колебания

Принимая во внимание справедливой гипотезу плоских сечений при осевой деформации стержня, деформация всех слоев стержня будет одинаковой и равной $\varepsilon = \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}$. При этом продольные усилия, действующие в сечениях 1'-1' и 2'-2', будут складываться из усилий, действующих в каждом слое стержня:

$$N_{1'-1'} = \sum_{i=1}^n N_{1'-1'}^{(i)}, \quad (1)$$

где:

$$N_{1'-1'}^{(i)} = E_i A_i \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

$$N_{2'-2'} = \sum_{i=1}^n N_{2'-2'}^{(i)}, \quad (3)$$

где:

$$N_{2'-2'}^{(i)} = E_i A_i \left[\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right) dz \right]; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Используя принцип Даламбера, условия динамического равновесия элемента dz запишется в следующем виде:

$$N_{2'-2'} - N_{1'-1'} = \sum_{i=1}^n j^{(i)}. \quad (5)$$

Здесь $j^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ – сила инерции каждого слоя стержня, причем:

$$j^{(i)} = \rho_i A_i \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} dz; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$



С учетом соотношений (2), (4) и (6) динамическое уравнение равновесия (5) получает вид:

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i A_i\right) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \left(\sum_{i=1}^n \rho_i A_i\right) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Вводя обозначение:

$$a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n E_i A_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i A_i}, \quad (8)$$

уравнение (7) – дифференциальное уравнение продольных колебаний неоднородного упругого многослойного стержня приводится к форме:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}, \quad (9)$$

то есть к уравнению поперечных колебаний упругой струны [22].

Общее решение уравнения (9), соответствующее i -ой форме колебаний, имеет вид [23]:

$$u(z,t) = \cos \frac{i\pi}{l} z \left(A_i \cos \frac{ai\pi}{l} t + B_i \sin \frac{ai\pi}{l} t \right). \quad (10)$$

Наложением подобных частных решений любое продольное колебание многослойного неоднородного упругого стержня можно представить в виде:

$$u(z,t) = \sum_{n=1,2,3,\dots} \cos \frac{n\pi}{l} z \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right). \quad (11)$$

Здесь постоянные A_n и B_n определяются на основании начальных условий.

Как показано в работе [23], если в начальный момент времени $t = 0$ заданы смещения и скорости поперечных сечений стержня $u(z,0) = f(z)$; $\frac{\partial u(z,0)}{\partial z} = v(z)$, то постоянные A_n и B_n определяются соотношениями:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \cos \frac{n\pi}{l} z dz; \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l v(z) \cos \frac{n\pi}{l} z dz. \quad (12)$$

Уравнение (11) характеризует рассматриваемое движение в многослойном упругом стержне как периодическое, то есть колебательное.

Для упругого стержня со свободными концами, испытывающего продольные колебания, уравнение частоты, как известно [22], имеет вид:

$$\sin \frac{\omega}{a} l = 0.$$

Отсюда частота колебаний будет равна:

$$\omega_n = \frac{an\pi}{l}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Период колебаний:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l}{an}. \quad (14)$$

При $n = 1$ будем иметь частоту основного тона колебаний.



Пример 1

В качестве примера рассмотрим неоднородную вертикальную стойку, жестко заделанную нижним концом. Поперечное сечение стойки – это круг с площадью $A_1 = 1 \text{ см}^2$. Длина стойки – 100 см. Стойка изготовлена из стали с модулем упругости $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Плотность материала стойки $\rho_1 = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Период колебаний стойки для $n = 1$ равен:

$$T_1 = \frac{2l}{a} = 2l \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} = 0,125 \text{ сек.}$$

Частота собственных колебаний стойки для $n = 1$ равна:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} = 50,304 \text{ сек}^{-1}.$$

Нанесем на поверхность стойки слой стеклопластика:

($E_2 = 3,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $\rho_2 = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$) толщиной $h = 0,5 \text{ см}$
($A_2 = 2,356 \text{ см}^2$).

Период колебаний стойки с покрытием для $n = 1$ равен:

$$T_1 = \frac{2l}{a} = 2l \sqrt{\frac{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}} = 0,121 \text{ сек.}$$

Частота собственных колебаний стойки с покрытием для $n = 1$ равна:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2}} = 51,793 \text{ сек}^{-1}.$$

Таким образом, частота собственных колебаний стойки с покрытием из стеклопластика увеличилась на 2,96 %.

Нанесем на поверхность стойки слой свинца:

($E_2 = 18 \cdot 10^3 \text{ МПа}$; $\rho_2 = 11340 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$) толщиной $h = 0,5 \text{ см}$
($A_2 = 2,356 \text{ см}^2$).

Период колебаний стойки с покрытием для $n = 1$ равен:

$$T_1 = \frac{2l}{a} = 2l \sqrt{\frac{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}} = 0,149 \text{ сек.}$$

Частота собственных колебаний стойки с покрытием для $n = 1$ равна:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2}} = 42,242 \text{ сек}^{-1}.$$

Таким образом, частота собственных колебаний стойки с покрытием из свинца уменьшилась на 16,03 %.

Замечание. В соответствии с формулами (9) и (8), величина

$N = \sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{E_1 A_1 + E_2 A_2 + \dots + E_n A_n}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 + \dots + \rho_n A_n}}$ представляет собой скорость распространения упругих продольных волн деформаций в неоднородном слоистом стержне. Поскольку скорости распространения продольных волн деформаций в

однородном стержне определяются только модулем упругости и плотностью материала, то в слоистом стержне следовало бы ожидать своей продольной волны со своей скоростью в каждом слое. Однако, если слои в стержне составляют единое целое и проскальзывание между слоями исключено, то в многослойном стержне будет распространяться только одна продольная волна со скоростью N . Эту волну можно назвать *групповой продольной волной*, а скорость N – *групповой скоростью*.

Поперечные колебания

Рассмотрим поперечные колебания многослойного неоднородного прямолинейного упругого стержня длиной l (рис. 2). Все слои стержня параллельны продольной оси стержня. Элемент стержня длиной dz при поперечных колебаниях стержня будет находиться в равновесии, если к действующим внутренним усилиям M_x и Q_y присоединить силу инерции:

$$j = \left(\sum_{i=1}^n \rho_i A_i \right) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} dz. \quad (15)$$

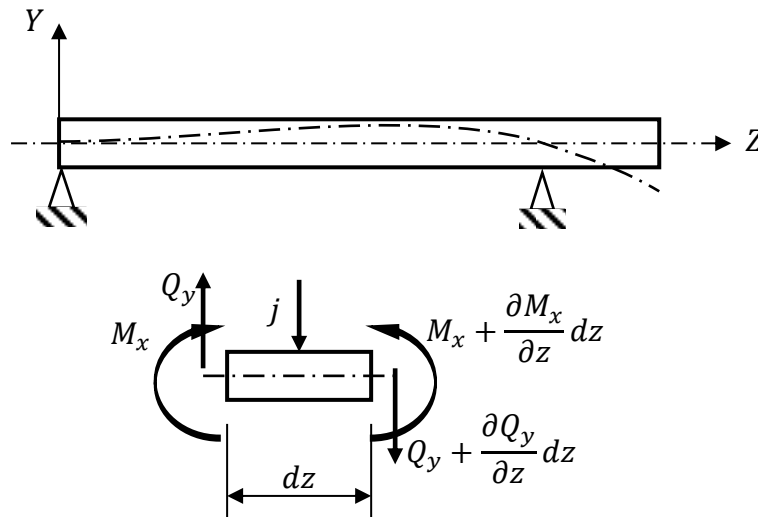


Рис. 2. Поперечные колебания

Проецируя все силы на вертикальную ось Y , получаем:

$$Q_y - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial z} dz \right) - j = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} + \left(\sum_{i=1}^n \rho_i A_i \right) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя известное выражение $\frac{\partial M_x}{\partial z} - Q_y = 0$ по z , получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} - \frac{\partial Q_y}{\partial z} = 0. \quad (17)$$



С другой стороны, имеем [24]:

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} = \frac{M_x}{\sum_{i=1}^n E_i I_x^{(i)}}. \quad (18)$$

Здесь $I_x^{(1)}, I_x^{(2)}, \dots, I_x^{(n)}$ – моменты инерции поперечных сечений слоев многослойного стержня относительно нейтральной оси X , определяемой из условия равенства нулю продольной силы:

$$\sum_{i=1}^n E_i S_x^{(i)} = 0. \quad (19)$$

Здесь $S_x^{(1)}, S_x^{(2)}, \dots, S_x^{(n)}$ – статические моменты поперечных сечений слоев многослойного стержня относительно нейтральной оси X .

Дифференцируя соотношение (18) дважды по z , получим:

$$\frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4} = \frac{\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}}{\sum_{i=1}^n E_i I_x^{(i)}}. \quad (20)$$

С учетом соотношений (16) и (17), уравнение (20) получает вид:

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i I_x^{(i)} \right) \frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4} + \left(\sum_{i=1}^n \rho_i A_i \right) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) представляет собой дифференциальное уравнение изгибных колебаний многослойного неоднородного упругого стержня.

Вводя обозначение:

$$EI = \sum_{i=1}^n E_i I_x^{(i)}; \quad \rho A = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i, \quad (22)$$

представим уравнение (21) в следующей форме:

$$EI \frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) представляет собой дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний многослойного неоднородного упругого стержня постоянного сечения.

Простейшим периодическим решением уравнения (23) является так называемое *главное колебание* [22, 25], в котором функция прогиба колеблющегося стержня изменяется с течением времени по гармоническому закону:

$$w(z, t) = \varphi(z) \sin(\omega t + \alpha). \quad (24)$$

Функция $\varphi(z)$, устанавливающая закон распределения максимальных отклонений точек оси стержня, называется формой главного колебания или *собственной формой*. Каждой собственной форме колебаний соответствует определенное значение частоты ω , которая называется *собственной частотой*.



После подстановки выражения (24) в уравнение (23) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\varphi(z)$:

$$\frac{d^4\varphi(z)}{dz^4} - k^4\varphi(z) = 0. \quad (25)$$

Здесь:

$$k^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}. \quad (26)$$

Общий интеграл уравнения (25) определяется выражением:

$$\varphi(z) = C_1 S(kz) + C_2 T(kz) + C_3 U(kz) + C_4 V(kz), \quad (27)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий; $S(kz), T(kz), U(kz), V(kz)$ – функции Крылова:

$$\begin{aligned} S(kz) &= \frac{1}{2}(\cosh kz + \cos kz); & T(kz) &= \frac{1}{2}(\sinh kz + \sin kz); \\ U(kz) &= \frac{1}{2}(\cosh kz - \cos kz); & V(kz) &= \frac{1}{2}(\sinh kz - \sin kz). \end{aligned} \quad (28)$$

Свойства функций Крылова [26] хорошо известны, и мы не будем на них останавливаться.

Пример 2

В качестве примера рассмотрим многослойную неоднородную вертикальную стойку длиной l , жестко заделанную нижним концом [25, 27]. Начало системы координат расположим в заделке, ось Z направим вертикально вверх. Граничные условия при этом будут иметь вид:

$$\varphi(0) = 0; \quad \left. \frac{d\varphi(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} \right|_{z=l} = 0; \quad \left. \frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} \right|_{z=l} = 0. \quad (a)$$

Из условий на нижнем конце ($z = 0$) следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Тогда решение (27) получает вид:

$$\varphi(z) = C_3 U(kz) + C_4 V(kz). \quad (б)$$

Из условий на верхнем конце ($z = l$) получаем:

$$C_3 k^2 S(kl) + C_4 k^2 T(kl) = 0; \quad C_3 k^3 V(kl) + C_4 k^3 S(kl) = 0. \quad (в)$$

Приравнявая нулю определитель этих уравнений, получаем следующее уравнение частот:

$$S^2(kl) - T(kl)V(kl) = 0. \quad (г)$$

С использованием функций Крылова (28), уравнение (г) приводится к виду:

$$\cos kl \cdot \cosh kl + 1 = 0. \quad (д)$$



Круговые частоты собственных колебаний, согласно (26), определяются выражением:

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (\text{е})$$

Форма упругой линии при колебаниях стойки будет определяться уравнением:

$$\varphi_n(z) = C_3 \left[U(k_n z) - \frac{S(k_n l)}{T(k_n l)} V(k_n z) \right], n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{ж})$$

Численный расчет

Пусть вертикальная стойка длиной l с прямоугольным поперечным сечением $b \times h$ состоит из трех слоев (рис. 3). Левый слой толщиной b_1 – это свинец ($E_1 = 18 \cdot 10^3$ МПа; $\rho_1 = 11340 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$); средний слой толщиной b_2 – это сталь ($E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\rho_2 = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$); правый слой толщиной b_3 – это стеклопластик ($E_3 = 3,5 \cdot 10^4$ МПа; $\rho_3 = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$).

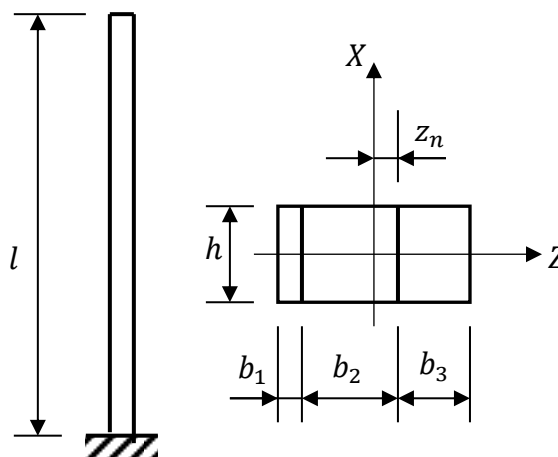


Рис. 3. К примеру

Исходные данные:

$$l = 100 \text{ см}; \quad h = 1 \text{ см}; \quad b_1 = 0,25 \text{ см}; \quad b_2 = 1 \text{ см}; \quad b_3 = 0,75 \text{ см}.$$

Определяем положение нейтральной линии в соответствии с формулой (19). Пусть нейтральная линия располагается в пределах среднего слоя. Обозначим расстояние между нейтральной линией и границей среднего и правого слоев через z_n . Тогда:

$$\begin{aligned} S_x^{(1)} &= b_1 h \left(\frac{b_1}{2} + b_2 - z_n \right); \\ S_x^{(2)} &= b_2 h \left(\frac{b_2}{2} - z_n \right); \\ S_x^{(3)} &= b_3 h \left(\frac{b_3}{2} + z_n \right). \end{aligned}$$

Из уравнения $E_1 S_x^{(1)} + E_2 S_x^{(2)} + E_3 S_x^{(3)} = 0$ находим $z_n = 0,645$ см.

Вычисляем моменты инерции слоев стержня относительно нейтральной оси:



$$I_x^{(1)} = \frac{b_1 h^3}{12} + b_1 h \left(\frac{b_1}{2} + b_2 - z_n \right)^2 = 0,0784 \text{ см}^4;$$
$$I_x^{(2)} = \frac{b_2 h^3}{12} + b_2 h \left(\frac{b_2}{2} - z_n \right)^2 = 0,1044 \text{ см}^4;$$
$$I_x^{(3)} = \frac{b_3 h^3}{12} + b_3 h \left(\frac{b_3}{2} + z_n \right)^2 = 0,8428 \text{ см}^4.$$

Вычисляем параметры (22):

$$EI = E_1 I_x^{(1)} + E_2 I_x^{(2)} + E_3 I_x^{(3)} = 5178,147 \text{ кН} \cdot \text{см}^2;$$
$$\rho A = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 + \rho_3 A_3 = 0,01146 \frac{\text{кг}}{\text{см}}.$$

Решая уравнение (д), определяем его первые три корня:

$$k_1 = 0,0187 \text{ см}^{-1}; k_2 = 0,0469 \text{ см}^{-1}; k_3 = 0,0784 \text{ см}^{-1}.$$

Определяем круговые частоты собственных колебаний стойки, согласно (е):

$$\omega_1 = 0,23506 \text{ сек}^{-1}; \omega_2 = 1,47857 \text{ сек}^{-1}; \omega_3 = 4,13168 \text{ сек}^{-1}.$$

Если вертикальная стойка длиной $l = 100$ см с прямоугольным поперечным сечением $1 \text{ см} \times 2 \text{ см}$ будет выполнена из стали, то круговые частоты собственных колебаний стойки будут равны:

$$\omega_1 = 0,13932 \text{ сек}^{-1}; \omega_2 = 0,87635 \text{ сек}^{-1}; \omega_3 = 2,44885 \text{ сек}^{-1}.$$

Выводы

1. При продольных колебаниях многослойного неоднородного упругого прямолинейного стержня постоянного сечения и период колебаний, и частота собственных колебаний могут как увеличиваться, так и уменьшаться по сравнению с колебаниями однородного стержня.

2. Используя материал и толщину покрытия однородного упругого прямолинейного стержня, можно регулировать как период продольных колебаний, так и частоту собственных колебаний.

3. Круговые частоты собственных поперечных колебаний многослойного неоднородного упругого прямолинейного стержня постоянного сечения существенно зависят и от материала, и от толщины слоев стержня.

4. Подбирая толщину и материал слоев многослойного неоднородного упругого прямолинейного стержня постоянного сечения, можно регулировать его круговые частоты собственных поперечных колебаний.

Заключение

Полученные в статье результаты могут быть использованы при проектировании многослойных неоднородных упругих прямолинейных стержней постоянного сечения, испытывающих динамические воздействия, с целью регулирования частоты собственных колебаний.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ананьев, И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем / И. В. Ананьев. – Москва : Гостехиздат, 1946. – 223 с.



2. Бабаков, И. М. Теория колебаний : учебное пособие / И. М. Бабаков. – 4-е изд., испр. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с. – ISBN 5-7107-7397-2.
3. Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – Москва : Высшая школа, 1979. – 416 с.
4. Болотин, В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 600 с.
5. Новацкий, В. Динамика сооружений / В. Новацкий. – Москва : Госстройиздат, 1963. – 376 с.
6. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – Москва : Физматгиз, 1959. – 439 с.
7. Филлипов, А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филлипов. – Изд. 2-е перераб. – Москва : Машиностроение, 1970. – 736 с.
8. Чудновский, В. Г. Методы расчета колебаний и устойчивость стержневых систем / В. Г. Чудновский. – Киев : Академия наук УССР, 1952. – 418 с.
9. Паймушин, В. Н. Математическое моделирование динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки / В. Н. Паймушин, В. М. Шишкин, С. Ф. Чумакова // Ученые записки Казанского университета. Серия. Физико-математические науки. – 2024. – Т. 166, № 3. – С. 407–425. – DOI 10.26907/2541-7746.2024.3.407-425.
10. Великанов, П. Г. Исследования по динамике стержневых сооружений / П. Г. Великанов, Ю. П. Артюхин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2023. – Т. 20, № 4. – С. 11–24. – DOI 10.31429/vestnik-20-4-11-24.
11. Тарлаковский, Д. В. Продольные нестационарные колебания конечного моментного упругого стержня / Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков, Ч. Май Куок // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – Т. 85, № 3. – С. 390–403. – DOI 10.32326/1814-9146-2023-85-3-390-403.
12. Гавриков, А. А. Изгибные колебания упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими силами / А. А. Гавриков, Г. В. Костин // Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, № 5. – С. 801–819. – DOI 10.31857/S0032823523050077.
13. Гавриков, А. А. Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил / А. А. Гавриков, Г. В. Костин // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2023. – № 6. – С. 93–109. – DOI 10.31857/S0002338823050062.
14. Культербаев, Х. П. Продольные колебания вертикального стержня с сосредоточенными массами / Х. П. Культербаев, М. М. Лафишева, Л. А. Барагунова // Строительная механика и конструкции. – 2023. – № 3 (38). – С. 100–107. – DOI 10.36622/VSTU.2023.38.3.009.
15. Культербаев, Х. П. Продольные колебания вертикального континуально-дискретного стержня при сейсмических возмущениях / Х. П. Культербаев, Л. А. Барагунова, М. М. Пайзулаев // Строительная механика и конструкции. – 2023. – № 4 (39). – С. 15–26. – DOI 10.36622/VSTU.2023.39.4.002.
16. Погудалина, С. В. Прямое численное моделирование аэроупругих колебаний стержня большого удлинения для режимов, близких к резонансным / С. В. Погудалина, Н. Н. Федорова // Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – Т. 62, № 2 (366). – С. 183–192. – DOI 10.15372/PMTF20210218.
Переводная версия:
Pogudalina, S. V. Direct numerical simulation of aeroelastic vibrations of a high-aspect-ratio rod for modes close to resonance modes / S. V. Pogudalina, N. N. Fedorova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol. 62, № 2. – С. 336–343.
17. Ватульян, А. О. О максимуме первой резонансной частоты для неоднородных упругих тел / А. О. Ватульян, В. О. Юров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 4. – С. 180–192. – DOI 10.31857/S1026351924040121.



18. Применение слоистой модели к расчетам динамических характеристик зданий при сейсмических воздействиях / В. А. Пшеничкина, С. С. Рекунов, С. Ю. Иванов [и др.] // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2022. – № 1 (86). – С. 43–56.

19. Никитин, И. С. Собственные частоты и формы продольных и крутильных колебаний стержней переменного поперечного сечения / И. С. Никитин, Н. Г. Бураго, А. Д. Никитин // Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, № 2. – С. 327–336. – DOI 10.31857/S003282352302011X.

20. Поддубный, А. А. Собственные поперечные колебания балки на упругом основании пастернака / А. А. Поддубный, В. А. Гордон // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2023. – № 3 (359). – С. 14–32. – DOI 10.33979/2073-7408-2023-359-3-14-32.

21. Воробьев, О. В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций / О. И. Воробьев // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 1 (24). – С. 25–38.

22. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов : учебник для вузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка [и др.]. – 4-е изд. перераб. и доп. – Киев : Вища школа, 1979. – 690 с.

23. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев : Наук. думка, 1988. – 736 с.

24. Бакушев, С. В. Прогибы в многослойных балках / С. В. Бакушев, Х. Р. Ахмедханов // Моделирование и механика конструкций. – 2025. – № 22. – С. 62–75.

25. Расчеты на прочность в машиностроении. Том III. Инерционные нагрузки. Колебания и ударные нагрузки. Выносливость. Устойчивость / С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев [и др.]. – Москва : Машгиз, 1959. – 1120 с.

26. Крылов, А. Н. Об определении критических скоростей вращающегося вала / А. Н. Крылов. – Ленинград : Академия наук СССР, 1932. – 31 с.

27. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела : учебное пособие для университетов / Ю. Н. Работнов. – Москва : Наука, 1979. – 744 с.

BAKUSHEV Sergey Vasilevich, doctor of technical sciences, professor of the chair of mechanics

LONGITUDINAL AND TRANSVERSE VIBRATIONS OF AN INHOMOGENEOUS MULTILAYER ELASTIC ROD

Penza State University of Architecture and Construction.

28, German Titov St., Penza, 440028, Russia.

Tel./fax: (8412) 49-72-77, e-mail: office@pguas.ru

Key words: rod, heterogeneity, elasticity, longitudinal and transverse vibrations.

Longitudinal and transverse vibrations of an inhomogeneous multilayer elastic straight rod of constant cross-section (with layers parallel to the longitudinal axis of the rod) are considered. The natural frequencies and periods of vibration of an inhomogeneous rod under longitudinal and transverse vibrations are determined. The results obtained in the article can be used in the design of multilayer inhomogeneous elastic straight rods of constant cross-section, subjected to dynamic loads, in order to regulate the frequency of natural vibrations.



REFERENCES

1. Anan'ev I. V. Spravochnik po raschetu sobstvennykh kolebaniy uprugikh system [Handbook for the calculation of natural vibrations of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat, 1946, 223 p.
2. Babakov I. M. Teoriya kolebaniy [Theory of vibrations]: uchebnoe posobie. 4-e izd., ispr. Moscow, Drofa, 2004, 591 p. ISBN 5-7107-7397-2.
3. Biderman V. L. Prikladnaya teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Applied theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshaya shkola, 1979, 416 p.
4. Bolotin V. V. Dinamicheskaya ustoychivost uprugikh system [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat, 1956, 600 p.
5. Novatsky V. Dinamika sooruzheniy [Dynamics of structures]. Moscow, Gosstroyizdat, 1963, 376 p.
6. Timoshenko S. P. Kolebaniya v inzhenernom dele [Vibrations in engineering]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 439 p.
7. Filippov A. P. Kolebaniya deformiruemykh system [Vibrations of deformable systems]. Izd. 2-e pererab. Moscow, Mashinostroenie, 1970, 736 p.
8. Chudnovsky V. G. Metody rascheta kolebaniy i ustoychivost sterzhnevnykh system [Methods for calculating vibrations and stability of rod systems]. Kiev, Akademiya nauk USSR, 1952, 418 p.
9. Paimushin V. N., Shishkin V. M., Chumakova S. F. Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskogo deformirovaniya sterzhnya-polosy, zakreplennogo na dvustoronnem opornom elemente cherez uprugie prosloiki [Mathematical modeling of the dynamic deformation of a strip-rod fixed on a bilateral support element through elastic layers]. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya. Fiziko-matematicheskie nauki, 2024, Vol. 166, № 3, P. 407–425. DOI 10.26907/2541-7746.2024.3.407-425.
10. Velikanov P. G., Artyukhin Yu. P. Issledovaniya po dinamike sterzhnevnykh sooruzheniy [Research on the dynamics of rod structures]. Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva, 2023, Vol. 20, № 4, P. 11–24. DOI 10.31429/vestnik-20-4-11-24.
11. Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V., Mai Kuok Ch. Prodolnye nestatsionarnye kolebaniya konechnogo momentnogo uprugogo sterzhnya [Longitudinal non-stationary vibrations of a finite moment elastic rod]. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2023, Vol. 85, № 3, P. 390–403. DOI 10.32326/1814-9146-2023-85-3-390-403.
12. Gavrikov A. A., Kostin G. V. Izgibnye kolebaniya uprugogo sterzhnya, upravlyаемого piezoelektricheskimi silami [Flexural vibrations of an elastic rod controlled by piezoelectric forces]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2023, Vol. 87, № 5, P. 801–819. DOI 10.31857/S0032823523050077.
13. Gavrikov A. A., Kostin G. V. Optimizatsiya prodolnykh dvizheniy uprugogo sterzhnya s pomoshchyu periodicheskikh raspredelennykh piezoelektricheskikh sil [Optimization of longitudinal motions of an elastic rod using periodically distributed piezoelectric forces]. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya, 2023, № 6, P. 93–109. DOI 10.31857/S0002338823050062.
14. Kulterbaev Kh. P., Lafisheva M. M., Baragunova L. A. Prodolnye kolebaniya vertikalnogo sterzhnya s sosredotochennymi massami [Longitudinal vibrations of a vertical rod with concentrated masses]. Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii, 2023, № 3 (38), P. 100–107. DOI 10.36622/VSTU.2023.38.3.009.
15. Kulterbaev Kh. P., Baragunova L. A., Payzulaev M. M. Prodolnye kolebaniya vertikalnogo kontinualno-diskretnogo sterzhnya pri seymicheskikh vozmushcheniyakh [Longitudinal vibrations of a vertical continuum-discrete rod under seismic disturbances]. Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii, 2023, № 4 (39), P. 15–26. DOI 10.36622/VSTU.2023.39.4.002.



16. Pogudalina S. V., Fedorova N. N. Pryamoe chislennoe modelirovanie aerouprugikh kolebaniy sterzhnya bolshogo udlineniya dlya rezhimov, blizkikh k rezonansnym [Direct numerical simulation of aeroelastic vibrations of a high-aspect-ratio rod for modes close to resonance modes]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2021, Vol. 62, № 2 (366), P. 183–192. DOI 10.15372/PMTF20210218.

(English version: Pogudalina S. V., Fedorova N. N. Direct numerical simulation of aeroelastic vibrations of a high-aspect-ratio rod for modes close to resonance modes. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2021, Vol. 62, № 2, P. 336–343.)

17. Vatulyan A. O., Yurov V. O. O maksimume pervoy rezonansnoy chastoty dlya neodnorodnykh uprugikh tel [On the maximum of the first resonant frequency for inhomogeneous elastic bodies]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2024, № 4, P. 180–192. DOI 10.31857/S1026351924040121.

18. Pshenichkina V. A., Rekunov S. S., Ivanov S. Yu., et al. Primenenie sloistoy modeli k raschetam dinamicheskikh kharakteristik zdaniy pri seysmicheskikh vozdeystviyakh [Application of a layered model for calculating the dynamic characteristics of buildings under seismic impacts]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitelstvo i arkhitektura*, 2022, № 1 (86), P. 43–56.

19. Nikitin I. S., Burago N. G., Nikitin A. D. Sobstvennye chastoty i formy prodolnykh i krutilnykh kolebaniy sterzhney peremennogo poperechnogo secheniya [Natural frequencies and modes of longitudinal and torsional vibrations of rods of variable cross-section]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2023, Vol. 87, № 2, P. 327–336. DOI 10.31857/S003282352302011X.

20. Poddubny A. A., Gordon V. A. Sobstvennye poperechnye kolebaniya balki na uprugom osnovanii Pasternaka [Natural transverse vibrations of a beam on a Pasternak elastic foundation]. *Fundamentalnye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii*, 2023, № 3 (359), P. 14–32. DOI 10.33979/2073-7408-2023-359-3-14-32.

21. Vorobev O. V. O metodakh polucheniya analiticheskogo resheniya dlya problemy sobstvennykh chastot sharnirnykh konstruktsiy [On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*, 2020, № 1 (24), P. 25–38.

22. Pisarenko G. S., Agarev V. A., Kvitka A. L., et al. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]: uchebnik dlya vuzov. 4-e izd. pererab. i dop. Kiev, Vishcha shkola, 1979, 690 p.

23. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Handbook on strength of materials]. 2-e izd., pererab. i dop. Kiev, Nauk. dumka, 1988, 736 p.

24. Bakushev S. V., Akhmedkhanov Kh. R. Progiby v mnogosloynnykh balkakh [Deflections in multilayer beams]. *Modelirovanie i mekhanika konstruktsiy*, 2025, № 22, P. 62–75.

25. Ponomarev S. D., Biderman V. L., Likharev K. K., et al. Raschety na prochnost v mashinostroenii. Inertsionnye nagruzki. Kolebaniya i udarnye nagruzki. Vynoslivost. Ustoychivost [Strength calculations in mechanical engineering. Vol. III. Inertial loads. Vibrations and impact loads. Endurance. Stability]. Moscow, Mashgiz, 1959, 1120 p.

26. Krylov A. N. Ob opredelenii kriticheskikh skorostey vrashchayushchegosya vala [On the determination of critical speeds of a rotating shaft]. Leningrad, Akademiya nauk SSSR, 1932, 31 p.

27. Rabotnov Yu. N. Mekhanika deformiruемого tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]: uchebnoe posobie dlya universitetov. Moscow, Nauka, 1979, 744 p.

© С. В. Бакушев, 2026

Получено: 15.12.2025 г.