



УДК 69.04:693

**М. Л. ПОЗДЕЕВ**, аспирант кафедры теории сооружений и технической механики, инженер лаборатории непрерывного контроля технического состояния зданий и сооружений; **С. Ю. ЛИХАЧЕВА**, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры теории сооружений и технической механики

### **ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ КРИВОЙ ДИАГРАММЫ СЖАТИЯ КАМЕННОЙ КЛАДКИ**

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»  
Россия, 603950, г. Н. Новгород, ул. Ильинская, д. 65. Тел.: (831) 430-54-96;  
эл. почта: maksim.leon.pz@yandex.ru, lihsvetlana@yandex.ru

*Ключевые слова:* каменная кладка, диаграмма деформирования, разупрочнение, аппроксимация экспериментальных данных, метод градиентного спуска.

---

*Описана методика определения параметров аппроксимирующей кривой диаграммы сжатия неармированной каменной кладки с учетом разупрочнения на основе экспериментальных данных для использования в нелинейных расчетах методом конечных элементов. В качестве аппроксимирующей кривой выбрана модель диаграммы сжатия железобетона, используемая в программном комплексе SCAD++ для нелинейных расчетов в рамках деформационной теории пластичности.*

---

Современным подходом к расчету зданий и сооружений является применение метода конечных элементов в пространственной постановке с учетом физической и геометрической нелинейности. Расчеты с использованием нелинейных свойств материала требуют использования полной диаграммы деформирования. При таком подходе появляется возможность учесть фактические эффекты перераспределения усилий внутри сечения конструктивных элементов и оценить реальное напряженное состояние в статически неопределимых системах.

Приведенные в нормах проектирования каменных и армокаменных конструкций [1] логарифмическая и трехлинейная диаграммы деформирования кладки не имеют ветки разупрочнения материала и поэтому не могут быть использованы для расчетов по методу «рассеянных» трещин, реализованному в современных программных комплексах. Суть данного метода заключается в рассмотрении материала с трещинами, обладающего свойством псевдопластичности как условной сплошной среды.

Сложность описания полной диаграммы деформирования каменной кладки обусловлена ограниченным количеством равновесных испытаний элементов каменной кладки, большой неоднородностью ее компонентов и различием деформационных характеристик камня и раствора.

В статье для определения характеристических точек диаграммы деформирования каменной кладки при сжатии проведена статистическая обработка результатов экспериментальных исследований каменных столбов [3]. В качестве базовой математической модели принята диаграмма Европейской Комиссии по бетону (ЕКБ) [4] (см. рис. 1). В работе [5] диаграмма работы железобетона при сжатии задается в виде уравнения:



$$\sigma(\varepsilon) = \frac{(E/E_r)\varepsilon_r\sigma_c}{1 + A\varepsilon_r + B\varepsilon_r^2 + C\varepsilon_r^3}, \quad \varepsilon_u \leq \varepsilon < 0, \quad (1)$$

где  $E_r = \sigma_c / \varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_c$ ,  $E_u = \sigma_u / \varepsilon_u$ ,  $p = \varepsilon_u / \varepsilon_c$ ;

$$A = \left[ E/E_u + (p^3 - 2p^2)E/E_r - (2p^3 - 3p^2 + 1) \right] / \left[ p(p^2 - 2p + 1) \right];$$

$$B = 2E/E_r - 3 - 2A, \quad C = 2 - E/E_r + A.$$

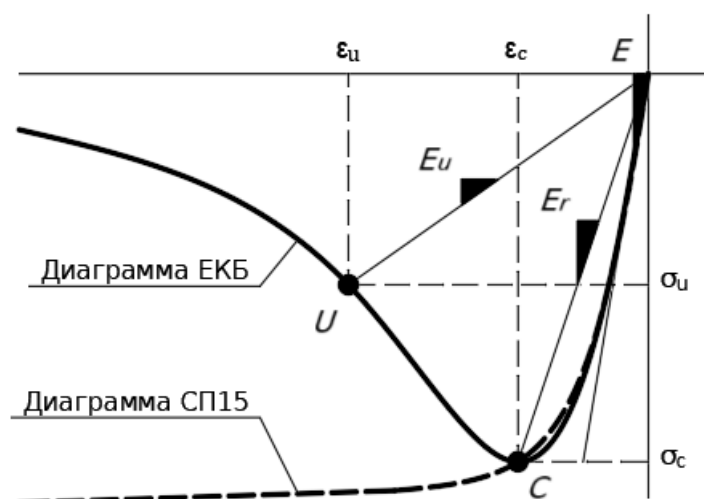


Рис. 1. Нормативная диаграмма и диаграмма ЕКБ с веткой разупрочнения

Уравнение (1) может быть преобразовано для каменной кладки заменой относительной деформации  $\varepsilon_c$  логарифмической зависимостью между напряжениями и деформациями, обозначенной в [1, 2]:

$$\varepsilon_c = \frac{1,1}{\alpha} \ln \frac{1}{11}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – упругая характеристика каменной кладки.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{-\sigma_c \varepsilon \alpha}{1 + Ak\varepsilon\alpha + B(k\varepsilon\alpha)^2 + C(k\varepsilon\alpha)^3}, \quad \varepsilon_u \leq \varepsilon < 0, \quad (3)$$

где  $k = 1/(1,1 \ln(1/11))$ ;

$$A = \left[ -(1/k)(p^3 - 2p^2 + p/d) - (2p^3 - 3p^2 + 1) \right] / (p^3 - 2p^2 + p);$$

$$B = -2/k - 2A - 3, \quad C = 1/k + A + 2, \quad p = \varepsilon_u / \varepsilon_c > 1, \quad d = \sigma_u / \sigma_c < 1.$$

Поскольку  $\sigma_c$  определено как предел прочности,  $\varepsilon_c$  – согласно зависимости (2), параметр  $p$  принимается в соответствии с физико-механическими свойствами материала и для каменной кладки равен двум, то неизвестными остаются величины  $\alpha$  и  $d$ .

Коэффициенты  $\alpha$  и  $d$  уравнения (3) для серии экспериментальных данных [3] могут быть определены путем поиска минимума функции  $F(\alpha, d)$  суммы квадратов отклонений по двум исследуемым параметрам:

$$F(\alpha, d) = \sum_{i=1}^N \left[ \sigma_{\text{эксп},i}(\varepsilon_{\text{эксп},i}) - \sigma_i(\varepsilon_{\text{эксп},i}, \alpha, d) \right]^2. \quad (4)$$

Общий вид функции  $F(\alpha, d)$  в окрестности точки минимума представлен на рис. 2.

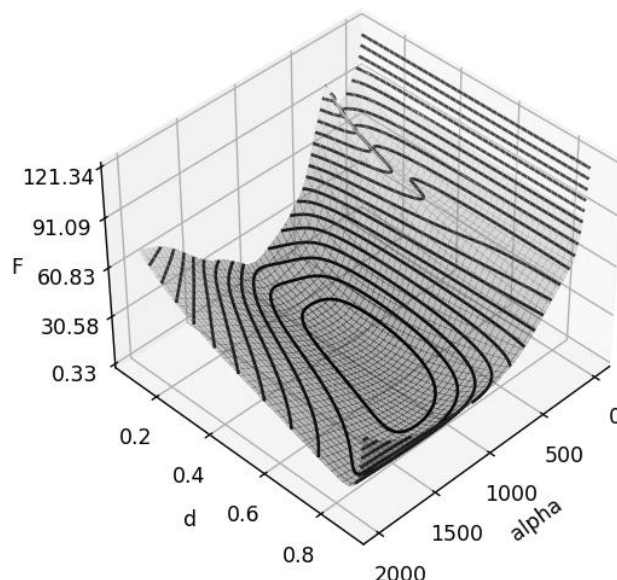


Рис. 2. Поверхность оптимизационной функции  $F(\alpha, d)$

Минимум функции  $F(\alpha, d)$  может быть определен численным методом градиентного спуска:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \lambda_\alpha \frac{\partial F(\alpha, d)}{\partial \alpha}, \\ d_{n+1} &= d_n - \lambda_d \frac{\partial F(\alpha, d)}{\partial d}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\lambda_\alpha, \lambda_d$  – масштабные коэффициенты по  $\alpha$  и  $d$  соответственно;

$\frac{\partial F(\alpha, d)}{\partial \alpha}, \frac{\partial F(\alpha, d)}{\partial d}$  – частные производные по  $\alpha$  и  $d$  соответственно.

В работе [3] проведены экспериментальные исследования неармированных каменных столбов при различном соотношении прочности раствора и камня. Образцы изготовлены из глиняного кирпича и раствора с различным соотношением ц : п : и (цемент : песок : известь) 1:3, 1:4,5:0,5 и 1:6, образцы с применением соответствующего раствора обозначены как *HS*, *HI* и *HW*. Прочностные характеристики образцов представлены в табл. 1 и на рис. 3.

Таблица 1

## Прочностные характеристики образцов

Характеристика	Кирпич	Раствор, при ц : п : и			Кладка		
		1:3	1:4,5:0,5	1:6	<i>HS</i>	<i>HI</i>	<i>HW</i>
Кол-во образцов	40	9	9	9	28	28	28
Средняя прочность, МПа	20,8	20,6	15,2	3,1	7,5	6,2	4,1
Коэф-т вариации	0,33	0,08	0,06	0,22	0,18	0,20	0,24
Марка по [1]	M200	M200	M150	M25	–	–	–

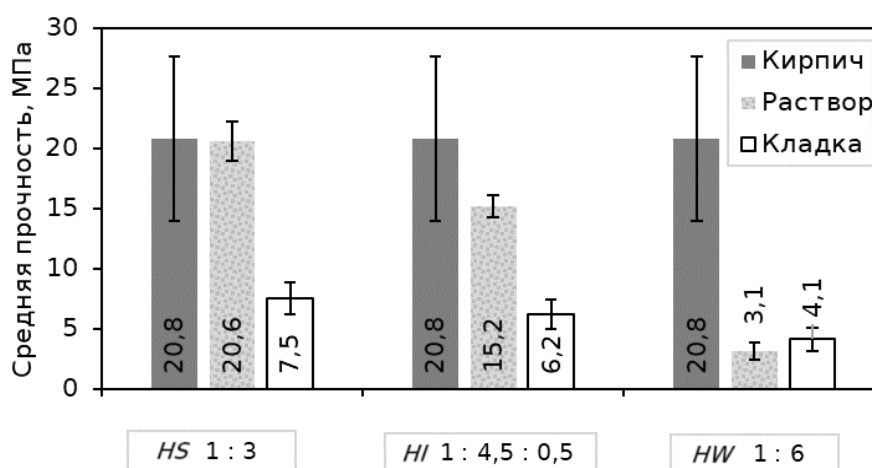


Рис. 3. Средняя прочность кирпича, раствора и кладки

Диаграммы деформирования образцов *HS*, *HI* и *HW* каменной кладки, изготовленные из растворов различной прочности, представлены на рис. 4. Координаты точек диаграммы ( $\varepsilon_{\text{эксп},i}$ ;  $\sigma_{\text{эксп},i}$ ) использованы для определения параметров  $\alpha$  и  $d$  оптимизационной функции (4).

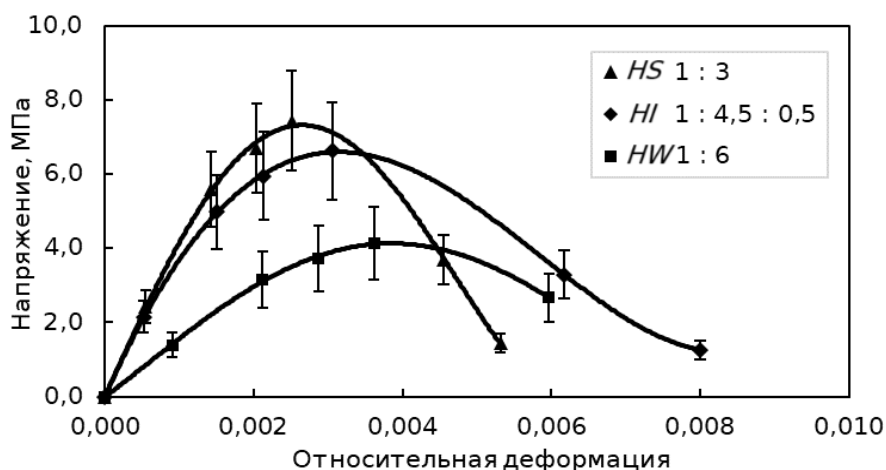


Рис. 4. Диаграмма деформирования образцов каменной кладки

Результаты итерационного расчета представлены в табл. 2 и на рис. 5–7. Алгоритм выполнен на языке *Python* с использованием библиотеки *NumPy*, визуализация данных – с использованием библиотеки *Matplotlib*.

Таблица 2

#### Прочностные характеристики образцов

Параметры		<i>HS</i>	<i>HI</i>	<i>HW</i>
Заданные параметры	$\sigma_c$	7,5	6,2	4,1
	$p$	2	2	2
Вычисленные параметры	$\alpha$	1060	910	710
	$d$	0,35	0,50	0,40

Соответствие параметров для моделирования диаграммы деформирования каменной кладки и нелинейной модели в SCAD++ на основе диаграммы деформирования ЕКБ представлено в табл. 3.

Таблица 3

#### Параметры диаграммы деформирования каменной кладки, задаваемые в SCAD++ на основе диаграммы ЕКБ

Наименование параметра диаграммы ЕКБ при сжатии	Значение
Начальный модуль упругости бетона	$E_0$
Предел прочности бетона на сжатие	$R_u$ или $R$
Деформация, соответствующая пределу прочности бетона на сжатие	по формуле (2)
Отношение напряжения в точке $U$ и предела прочности бетона на сжатие	$d$ (при $p = 2$ )
Отношение деформации в точке $U$ и деформации, соответствующей пределу прочности бетона на сжатие	$p = 2$

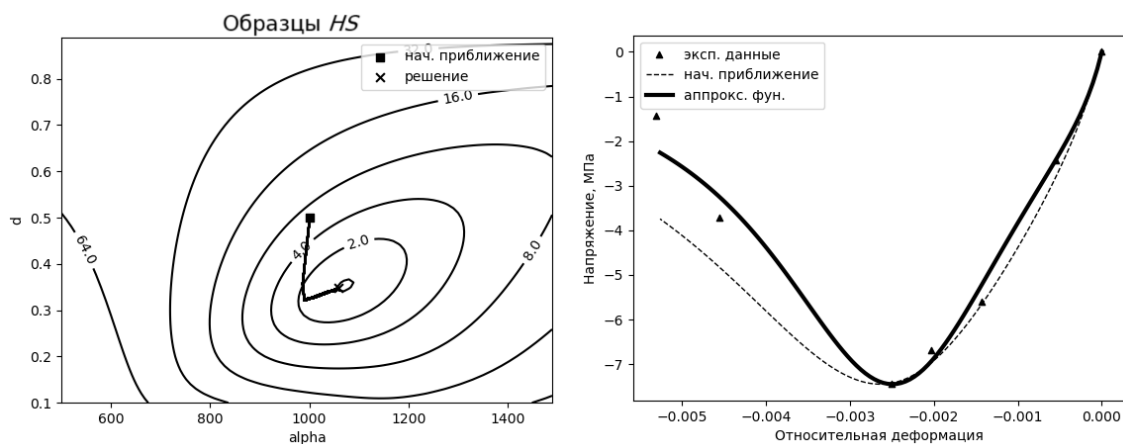


Рис. 5. Контурная диаграмма оптимизационной функции и результаты сходимости методом градиентного спуска параметров аппроксимирующей кривой для образцов *HS*

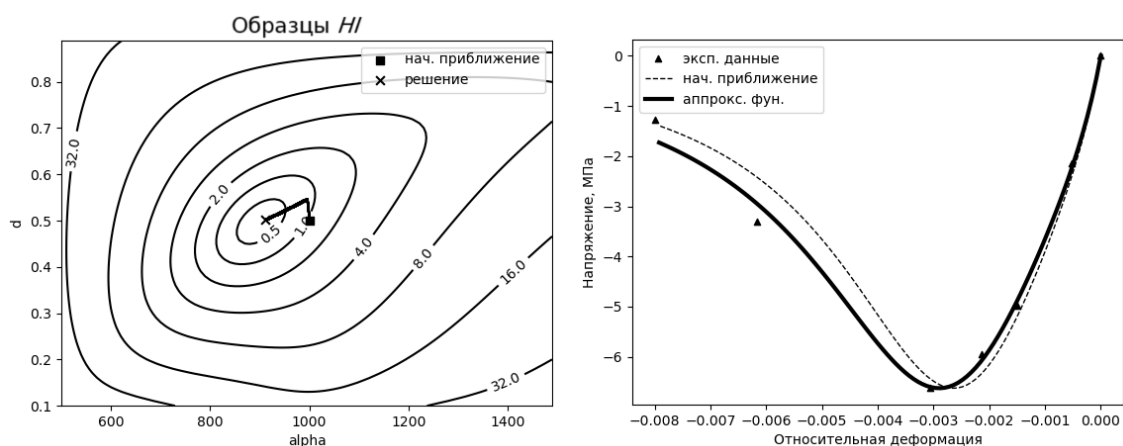


Рис. 6. Контурная диаграмма оптимизационной функции и результаты сходимости методом градиентного спуска параметров аппроксимирующей кривой для образцов *HI*

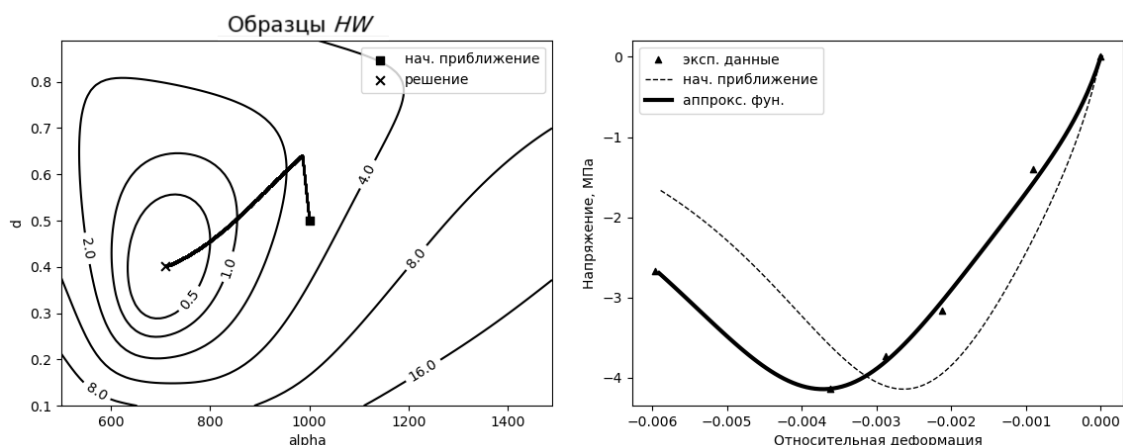


Рис. 7. Контурная диаграмма оптимизационной функции и результаты сходимости методом градиентного спуска параметров аппроксимирующей кривой для образцов *HW*



В результате численного расчета определены параметры аппроксимирующей кривой для трех типов образцов. Образцы *Н1* с добавками извести показали более выраженные псевдопластические свойства, что выражено в большем значении коэффициента  $d$  при одинаковых значениях параметра  $p$ . Значения упругих характеристик кладки  $\alpha$  находятся в пределах, рекомендуемых нормативной литературой [1].

Описанная в статье методика может быть использована для анализа других экспериментальных данных. Полученные коэффициенты уравнения (3) справочно могут быть использованы в программном комплексе SCAD++ при нелинейном расчете конструкций из каменных кладок по деформационной теории пластичности.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. СП 15.13330.2020. Каменные и армокаменные конструкции : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 30 декабря 2020 г. N 902/пр : введен в действие с 1 июля 2021 г. : актуализированная редакция СНиП II-22-81\*. – URL: <https://docs.cntd.ru/document/573741258?ysclid=110ltu0xnj569263435>. – Текст : электронный.
2. Онищик, Л. И. Каменные конструкции промышленных и гражданских зданий / Л. И. Онищик. – Москва : Стройиздат, 1939. – 208 с. – Текст : непосредственный.
3. Stress-Strain Characteristics of Clay Brick Masonry under Uniaxial Compression / Hemant B. Kaushik, Durgesh C. Rai, Sudhir K. Jain, M. // Journal of Materials in Civil Engineering. – India, 2007. – P. 728–739. – DOI 10.1061/(ASCE)0899-1561(2007)19:9(728).
4. СЕВ-FIP Model Code 1990. Comite Euro-International du Beton. – London : Thomas Telford Services Ltd : Telford House, 1993. – 437 p.
5. Фиалко, С. Ю. Применение метода конечных элементов к анализу прочности и несущей способности тонкостенных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности / С. Ю. Фиалко. – Москва : СКАД СОФТ : АСВ, 2018. – 192 с. – ISBN 978-5-903683-36-9. – Текст : непосредственный.

**POZDEEV Maksim Leonidovich, postgraduate student of the chair of theory of structures and technical mechanics, engineer of the laboratory; LIKHACHYOVA Svetlana Yurevna, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the chair of theory of structures and technical mechanics**

#### CALCULATION OF APPROXIMATING CURVE PARAMETERS OF MASONRY COMPRESSION DIAGRAM

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering  
65, Iljinskaya St., Nizhny Novgorod, 603950, Russia. Tel.: +7 (831) 430-54-96;  
e-mail: maksim.leon.pz@yandex.ru, lihsvetlana@yandex.ru

*Key words:* masonry, stress-strain diagram, softening, approximation of experimental data, gradient descent method.





*The article describes the method of determining the parameters of the approximating curve of the compression diagram of unreinforced masonry, taking into account softening on the basis of experimental data for use in nonlinear calculations by the finite element method. The model of the compression diagram of reinforced concrete used in the software package SCAD++ for nonlinear calculations within the framework of the deformation theory of plasticity was chosen as an approximating curve.*

#### REFERENCES

1. SP 15.13330.2020. Kamennye i armokamennye konstruksii [Stone and reinforced stone structures] : utverzhdyon prikazom Min-va stroit. i zhilishchno-kommun. khozyaystva RF ot 30 dekabrya 2020 g. N 902/pr : vved. v deystvie s 1 iyulya 2021 g. : aktualizirovannaya redaktsiya SNiP II-22-81\*. – URL: <https://docs.cntd.ru/document/573741258?ysclid=ll0ltu0xnj569263435>.
2. Onischik L. I. Kamennye konstruksii promyshlennykh i grazhdanskikh zdaniy [Stone structures of industrial and civil buildings]. Moscow : Stroyizdat, 1939, 208 p.
3. Hemant B. Kaushik, Durgesh C. Rai, Sudhir K. Jain, M. Stress-Strain Characteristics of Clay Brick Masonry under Uniaxial Compression // Journal of Materials in Civil Engineering. India: 2007. P. 728–739. – DOI 10.1061/(ASCE)0899-1561(2007)19:9(728).
4. CEB-FIP Model Code 1990. Comite Euro-International du Beton. London: Thomas Telford Services Ltd, Thomas Telford House, 1993. 437 p.
5. Fialko S. Yu. Primenenie metoda konechnykh elementov k analizu prochnosti i nesuschey sposobnosti tonkostennykh zhelezobetonnykh konstruksiy s uchyotom fizicheskoy nelineynosti [Application of finite element method to analysis of strength and bearing capacity of thin-walled reinforced concrete structures taking into account physical nonlinearity]. Moscow: SKAD SOFT: ASV, 2018, 192 p. – ISBN 978-5-903683-36-9.

© М. Л. Поздеев, С. Ю. Лихачева, 2023

Получено: 29.06.2023 г.