УДК 539.3

В. И. ЕРОФЕЕВ, д-р физ.-мат. наук, директор[1], проф. кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики[2]; Д. А. БУТЫГИН[2], студент

ДИСПЕРСИЯ И ЗАТУХАНИЕ СДВИГОВОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

[1]Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук»
Россия, 603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, д. 85. Тел.: (831) 432-03-00; эл. почта: erof.vi@yandex.ru
[2]ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
Россия, 603022, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, д. 23. Тел.: (953) 551-54-72; эл. почта: danilbutygin3@gmail.com
Ключевые слова: пластина, вязкоупругое основание, сдвиговая волна, дисперсия, затухание.

Приводится постановка и решение задачи о распространении сдвиговой (антиплоской) волны в пластине, лежащей на вязкоупругом основании. На базе полученного решения проанализированы дисперсионные и диссипативные свойства рассматриваемой системы.

Введение

Многие элементы строительных и машиностроительных конструкций, подвергаемые поверхностной обработке (например, с целью упрочнения, повышения износостойкости), можно схематически представить в виде упругой пластины, лежащей на упругом или вязкоупругом основании [1, 2]. Знание особенностей распространения акустических волн в таких системах способствует разработке методов неразрушающего контроля качества наносимых покрытий, изменяющих свойства приповерхностных слоев конструкционных материалов [3].

В публикуемой работе исследуются особенности распространения поперечных волн в вязкоупругой пластине, лежащей на нелинейно-упругом основании.

Уравнение динамики и вывод дисперсионного уравнения

Распространение плоской сдвиговой волны в упругой пластине, лежащей на вязкоупругом основании, описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h}{\rho}u + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ – поперечное перемещение частиц срединной плоскости пластины; $c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость, с которой распространялась бы сдвиговая волна, если бы пластина не взаимодействовала с вязкоупругим основанием; G – модуль сдвига; ρ – плотность материала, из которого изготовлена пластина;

h, μ – коэффициенты, характеризующие упругие и вязкие свойства основания, соответственно.

Замены:

$$V=\frac{u}{u_0},\xi=\frac{x}{X},\tau=\frac{t}{T},X^2=c_0^2T^2=\frac{G\varepsilon}{h},\frac{\mu T}{\rho}=2\varepsilon' \quad (2)$$

приводят уравнение (1) к безразмерному виду:

$$V_{\tau\tau}-V_{\xi\xi}+\varepsilon V+2\varepsilon' V_\tau=0\,, \quad (3)$$

где индексами τ обозначены производные по безразмерному времени; ξ – по безразмерной координате; $\varepsilon<1$, $\varepsilon'<1$ – параметры, характеризующие упругость и вязкость внешней среды.

Будем искать решение уравнения (3) в виде гармонической волны в области $\tau>0,\xi>0$.

$$V=Re\left(Ae^{i(\omega\tau-k\xi)}\right), \quad (4)$$

где A – комплексная амплитуда, что позволяет получить дисперсионное уравнение (5), связывающее безразмерную частоту ω с безразмерным волновым числом k:

$$-\omega^2+k^2+\varepsilon+2\varepsilon'\omega i=0\,. \quad (5)$$

В общем случае k и ω являются комплексными величинами.

Анализ дисперсии и затухания волны при рассмотрении краевой задачи

Перепишем волновое число в виде:

$$k=k_1+ik_2, \quad (6)$$

тогда решение уравнения (3) будет иметь вид:

$$V=\mathrm{a}e^{k_2\xi}\sin(\omega\tau-k_1\xi+\varphi), \quad (7)$$

где $a=|A|$, $\varphi=\arg(A)$.

Из (7) очевидно, что при $k_2<0$ получим экспоненциально спадающую гармоническую волну, распространяющуюся в положительном направлении пространственной оси ξ.

Комплексному дисперсионному уравнению (5) эквивалентна система двух уравнений:

$$\begin{cases}-\omega^2+k_1^2-k_2^2+2ik_1k_2+\varepsilon=0,\\ k_1k_2+\varepsilon'\omega=0.\end{cases} \quad (8)$$

Решая систему (8), определим закон дисперсии, который задает связь между действительной частью волнового числа и частотой:

$$\omega=k_1\sqrt{\frac{k_1^2+\varepsilon}{k_1^2+\varepsilon'^2}}\,, \quad (9)$$

а также выявим частотную зависимость затухания, характеризуемого мнимой частью волнового числа

$$k_2(\omega)=-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{\varepsilon^2-2\omega^2\left(\varepsilon-2\varepsilon'^2\right)+\omega^4}+\varepsilon-\omega^2\right)}{2}}\,. \quad (10)$$

Частотная зависимость затухания сдвиговой волны приведена на рис. 1 цв. вклейки.

Расчеты производились при: $\varepsilon'^2=0{,}12$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon=0{,}5$ и $\varepsilon=0{,}1$.

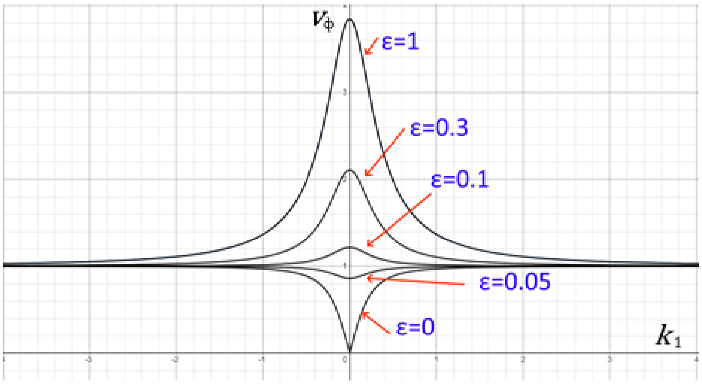

Рис. 1. Зависимость фазовой скорости сдвиговой волны от действительной части волнового числа

Закон дисперсии (9) позволяет вычислить фазовую $v_ф$ и групповую $v_{гр}$ скорости сдвиговой волны:

$$v_ф = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{k_1^2 + \varepsilon}{k_1^2 + \varepsilon'^2}}\,. \tag{11}$$

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk_1} = \frac{\varepsilon\varepsilon'^2 + 2\varepsilon'^2 k_1^2 + k_1^4}{(\varepsilon'^2 + k_1^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon + k_1^2}}\,. \tag{12}$$

График зависимости $v_ф(k_1)$, построенный при $\varepsilon'^2 = 0{,}0676$, и при разных ε приведен на рис. 1. При изменении ε'^2 график качественно не меняется.

График зависимости $v_{гр}(k_1)$, построенный при $\varepsilon = 0.34$ и при разных ε'^2, приведен на рис. 2 цв. вклейки. При изменении ε график качественно не меняется.

Соотношение фазовой и групповой скоростей определяется формулой:

$$\frac{v_{гр}}{v_ф} = 1 + \frac{k_1^2(\varepsilon'^2 - \varepsilon)}{\varepsilon\varepsilon'^2 + k_1^4 + k_1^2(\varepsilon'^2 + \varepsilon)} \le 1\,. \tag{13}$$

Из (13) видно, что $\frac{v_{гр}}{v_ф} < 1$, т. е. дисперсия нормальная при $\varepsilon'^2 \le \varepsilon$ (упругость внешней среды преобладает над вязкостью), и $\frac{v_{гр}}{v_ф} > 1$, т. е. дисперсия аномальная при $\varepsilon'^2 > \varepsilon$ (вязкость внешней среды преобладает над упругостью).

Дисперсионный анализ задачи Коши

Перепишем частоту в виде:

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2. \tag{14}$$

Тогда из уравнения (5) получим

$$\omega = \pm\sqrt{\varepsilon - \varepsilon'^2 + k^2} + i\varepsilon', \text{ при } \varepsilon'^2 - \varepsilon - k^2 < 0.$$

Решение уравнения (3) будет иметь вид:

$$V = ae^{-\varepsilon'\tau}\sin(\omega_1\tau - k_1\xi + \varphi). \tag{15}$$

Очевидно, что сдвиговая волна (15) является экспоненциально спадающей. Ее фазовая скорость задается выражением (рис. 2):

$$v_ф = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon'^2 + k^2}}{k}\,. \tag{16}$$

К СТАТЬЕ В. И. ЕРОФЕЕВА, Д. А. БУТЫГИНА «ДИСПЕРСИЯ И ЗАТУХАНИЕ СДВИГОВОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ»

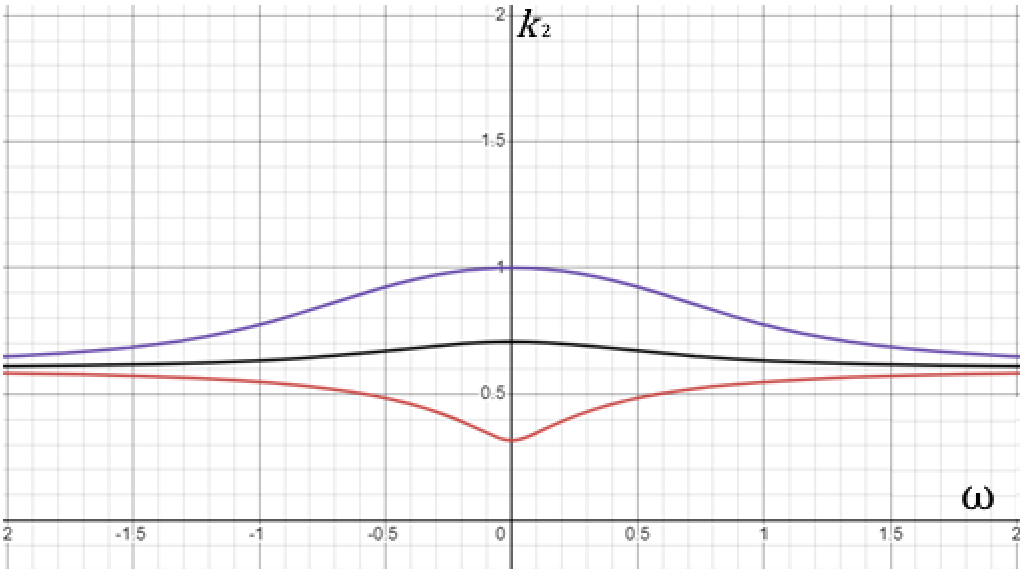

Рис. 1. Частотная зависимость затухания сдвиговой волны

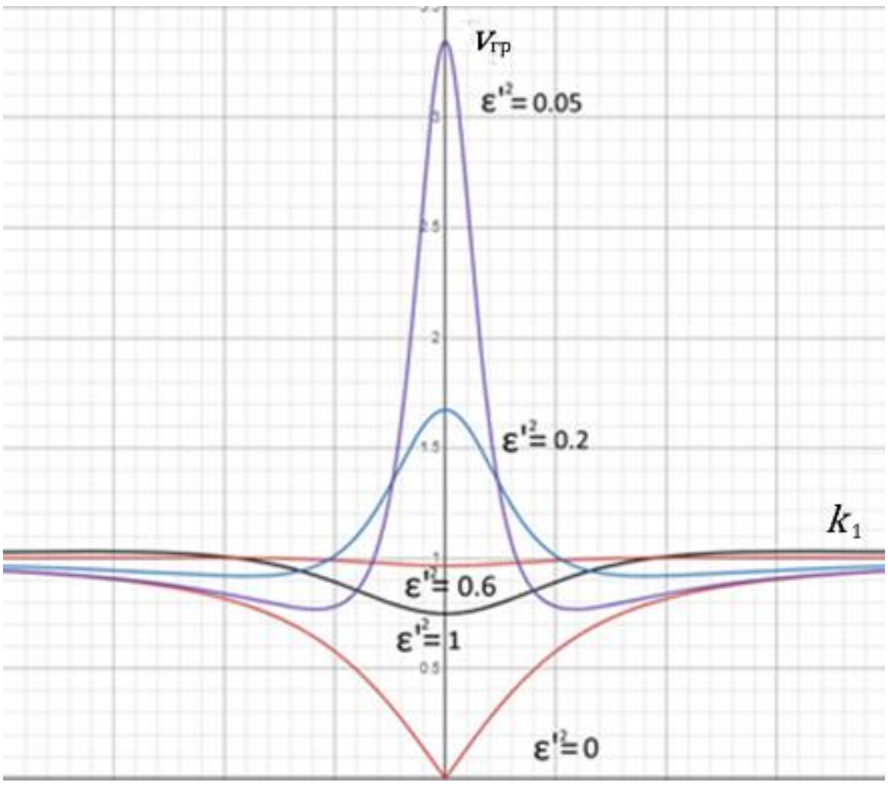

Рис. 2. Зависимость групповой скорости сдвиговой волны от действительной части волнового числа

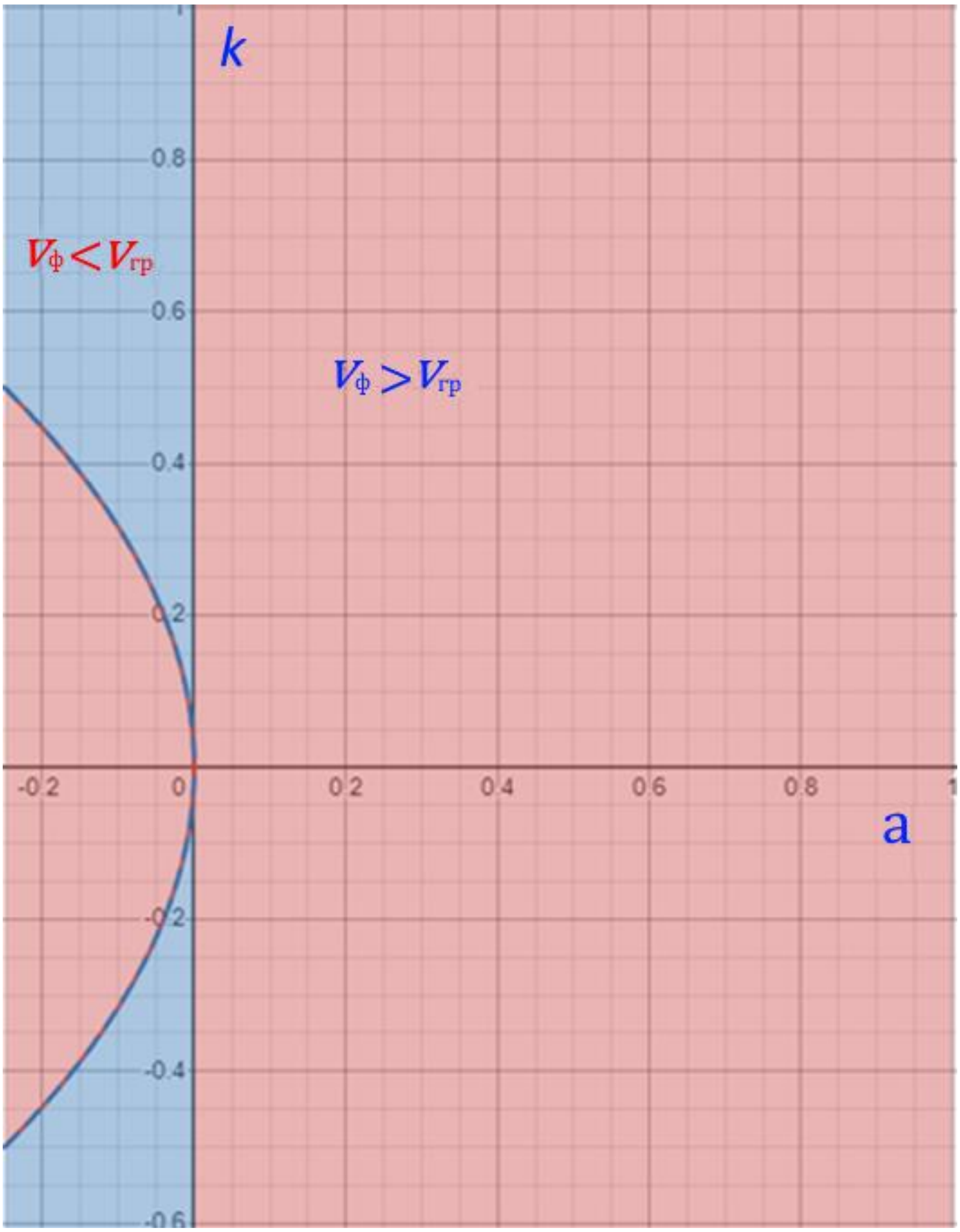

Рис. 3. Область параметров *k*(a)

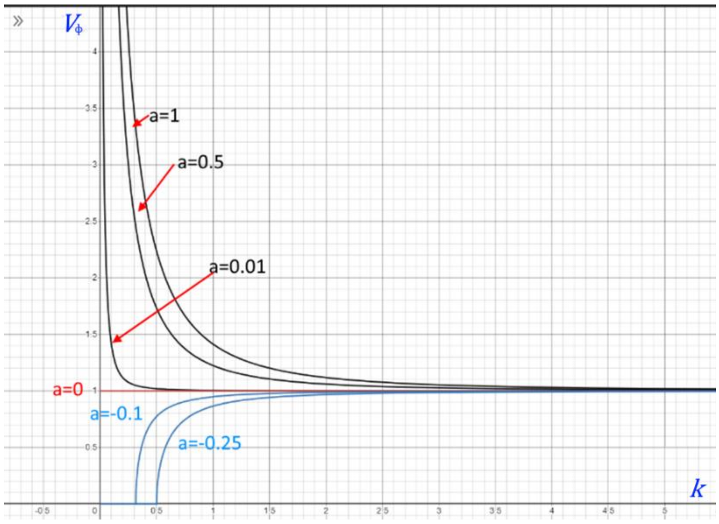

Рис. 2. Зависимость фазовой скорости сдвиговой волны от волнового числа

Для вычисления групповой скорости воспользуемся формулой Релея [4]:

$$v_{\text{гр}} = v_{\text{ф}} + \frac{dv_{\text{ф}}}{dk}k$$

и равна (рис. 3):

$$v_{\text{гр}} = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon'^2 + k^2}}. \qquad (17)$$

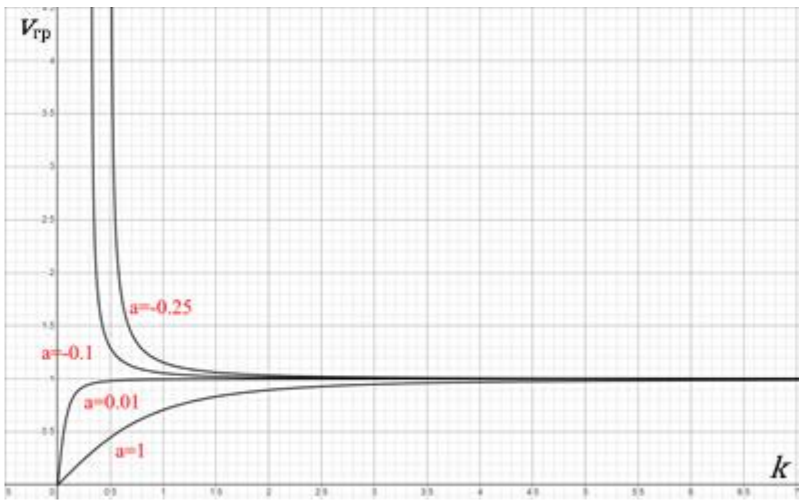

Рис. 3. Зависимость групповой скорости сдвиговой волны от волнового числа

При построении графиков для удобства введен параметр $\text{a} = \varepsilon - \varepsilon'^2$, заметим, что $-\frac{1}{4} < \text{a} < 1$.

Соотношение фазовой и групповой скоростей определяется формулой:

$$\frac{v_{\text{гр}}}{v_{\text{ф}}} = 1 - \frac{\text{a}}{\text{a}+k^2}.$$

На рис. 3 цв. вклейки представлен график области параметров $k(\text{a})$. Красным выделена область нормальной дисперсии, синим – область аномальной дисперсии.

Заключение

В данной работе в качестве объекта исследования выбрана совершающая поперечные антиплоские колебания пластина, лежащая на вязкоупругом основании. Для бесконечной пластины, при отсутствии внешних сил, решение полученного уравнения отыскивается в виде бегущей гармонической волны, что позволяет получить дисперсионное уравнение, связывающее частоту с волновым числом алгебраическим уравнением с комплексными коэффициентами. Считая волновое число (или частоту) комплексной величиной, находим решение дисперсионного уравнения, т. е. закон дисперсии. Знание закона дисперсии позволяет вычислить фазовую и групповую скорости поперечной волны, представляющей собой бегущее возмущение, затухающее по гармоническому закону.

Работа выполнена в рамках государственного задания на фундаментальные научные исследования на 2021–2023 годы по теме № 0030-2021-0025.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лисовский, А. Л. Лазерное упрочнение штампового инструмента / А. Л. Лисовский, И. В. Плетенев. – Текст : непосредственный // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2008. – № 3(20). – С. 90–99.

2. Войтович, О. Н. Исследование влияния параметров лазерной термообработки на свойства упрочненных поверхностных слоев / О. Н. Войтович, И. О. Сокоров. – Текст : непосредственный // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2013. – № 2 (39). – С. 6–14.

3. Углов, А. Л. Акустический контроль при изготовлении и эксплуатации / А. Л. Углов, В. И. Ерофеев, А. Н. Смирнов. – Москва : Наука, 2009. – 280 с. – ISBN 978-5-02-035764-8. – Текст : непосредственный.

4. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – Москва : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2000. – 560 с. – ISBN 5-93972-012-9. – Текст : непосредственный.

EROFEEV Vladimir Ivanovich, doctor of physical and mathematical sciences, director[1], professor of the chair of theoretical, computer and applied mechanics[2], BUTYGIN Daniil Alekseevich, student[2]

DISPERSION AND ATTENUATION OF A SHEAR ACOUSTIC WAVE PROPAGATING IN A PLATE LAYING ON A VISCOELASTIC FOUNDATION

[1]Mechanical Engineering Research Institute of the RAS – Branch of “Federal Research Center A.V. Gaponov – Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences”
85, Belinsky St., Nizhny Novgorod, Russia. Tel.: +7(831) 432-03-00;
e-mail: erof.vi@yandex.ru
[2]National Research Lobachevsky Nizhny Novgorod State University
23, Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603022, Russia. Tel.: +7(953) 551-54-72;
e-mail: danilbutygin3@gmail.com

Key words: plate, viscoelastic foundation, shear wave, dispersion, attenuation.

The article deals with the statement and solution of the problem of propagation of a shear (antiplane) wave in a plate lying on a viscoelastic foundation. Based on the obtained solution, the dispersion and dissipative properties of the system under consideration are analyzed.

REFERENCES

1. Lisovsky A. L., Pletenev I. V. Lazernoe uprochnenie shtampovogo instrumenta [Laser hardening of press tools] // Vestnik Belorussko-Rossiyskogo Universiteta [Bulletin of the Belarusian – Russian University]. – 2008. – № 3(20). – P. 90–99.

2. Voytovich O. N., Sokorov I. O. Issledovanie vliyaniya parametrov lazernoy termoobrabotki na svoystva uprochnyonnykh poverkhnostnykh sloyov [The research into the influence of laser thermal processing parameters on the properties of strengthened surface layers] // Vestnik Belorussko-Rossiyskogo Universiteta [Bulletin of the Belarusian – Russian University]. – 2013. – № 2(39). – P. 6–14.

3. Uglov A. L., Erofeev V. I., Smirnov A. N. Akusticheskiy kontrol pri isgotovlenii i ekspluatatsii [Acoustic control during manufacture and operation]. Moscow: Nauka. 2009. 280 p. – ISBN 978-5-02-035764-8.

4. Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln [Introduction to the theory of oscillations and waves]. Moscow: NITz “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”. 2000. 560 p. – ISBN 5-93972-012-9.

Получено: 05.04.2023 г.