УДК 539.3

В. И. ЕРОФЕЕВ, д-р физ.-мат. наук, директор[1], проф. кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики[2]; А. А. АВДЕЕВА[2], студент; К. А. ГРОМОВА[2], студент

ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛНАМИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМИСЯ В ПЛАСТИНАХ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГИХ ОСНОВАНИЯХ

[1]Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук»
Россия, 603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, д. 85. Тел.: (831) 432-03-00; эл. почта: erof.vi@yandex.ru
[2]ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
Россия, 603022, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, д. 23. Тел.: (952) 445-35-76, (969) 606-12-34; эл. почта: a.a.avdeeva2001@gmail.com; KrGromova99@yandex.ru
Ключевые слова: перенос энергии, волна, пластина, мембрана, упругое основание.

Рассматриваются задачи о распространении поперечной волны в мембране, лежащей на упругом основании, и о распространении сдвиговой волны в пластине, лежащей на нелинейно-упругом основании. Основное внимание уделяется анализу особенностей переноса энергии волнами в линейных и нелинейных системах.

Введение

Пластина, лежащая на упругом основании и совершающая при этом поперечные колебания, является распространенным элементом многих машиностроительных конструкций [1], зданий и сооружений [2, 3]. Именно из теории сооружений пришел термин «упругое основание», под которым подразумевается расчетная механическая модель среды, сопротивляющейся деформированию конструкции, взаимодействующей с ней. В задачах строительной механики таким основанием выступает грунтовое основание. Исторически первая и самая распространенная ныне модель упругого основания базируется на гипотезе Винклера (1867 г.) [4], предполагающей, что зависимость между давлением на грунт (p) и осадкой точки (u), вызванной этим давлением, является прямо пропорциональной, т. е. $p \sim u$.

Вибрации, вызванные динамическими воздействиями внешних сил на пластины, могут распространяться в виде бегущих волн [1]. Важной характеристикой волнового поля, наряду с амплитудой и фазой, является количество переносимой волнами энергии.

Публикуемая работа посвящена изучению особенностей переноса энергии поперечными волнами в пластинах, лежащих на упругих основаниях. Рассмотрены две задачи: в двумерной постановке рассматривается мембрана (тонкая пластина с исчезающе малой жесткостью на изгиб [5]), по которой распространяется линейная поперечная волна; в одномерной постановке рассматривается пластина, лежащая на нелинейно-упругом основании, в которой распространяется плоская сдвиговая волна.

Поперечные волны в мембране, лежащей на линейно-упругом основании

С точки зрения аналитической механики мембрана, совершающая поперечные колебания, принадлежит к классу систем, имеющих лагранжиан вида: $L = L(u, u_t, u_x, u_y)$ и описываемых уравнением динамики:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial u_y}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $u(x, y, t)$ – обобщенная координата, в качестве которой выбрано поперечное перемещение частиц мембраны, индексами x, y, t обозначены частные производные по пространственным координатам и времени, соответственно.

Для мембраны лагранжиан, задаваемый как разность плотностей кинетической (W_k) и потенциальной (W_Π) энергий, имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}\left(\rho u_t^2 - N\left(u_x^2 + u_y^2\right) - hu^2\right), \qquad (2)$$

где $W_k = \frac{1}{2}\rho u_t^2$, $W_\Pi = \frac{1}{2}\left(N\left(u_x^2 + u_y^2\right) + hu^2\right)$.

Здесь введены обозначения: ρ – плотность материала, из которого изготовлена мембрана; h – коэффициент, характеризующий жесткость основания; N – натяжение.

Подставляя (2) в (1), получим уравнение колебаний мембраны, лежащей на упругом основании Винклера:

$$\rho u_{tt} - N u_{xx} - N u_{yy} + hu = 0\,. \qquad (3)$$

Задавая решение уравнения (3) в виде бегущей гармонической волны

$$u(x, y, t) = Ae^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + A^* e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \qquad (4)$$

где A – комплексная амплитуда; k_x, k_y – компоненты волнового вектора; ω – частота волны, получим дисперсионное уравнение:

$$-\omega^2 + c^2 {k_x}^2 + c^2 {k_y}^2 + \frac{h}{\rho} = 0\,, \qquad (5)$$

где $c = \sqrt{N/\rho}$ – скорость распространения возмущений при отсутствии упругого основания;

Далее находим как частота связана с компонентами волнового вектора

$$\omega = \pm\sqrt{c^2\left({k_x}^2 + {k_y}^2\right) + \frac{h}{\rho}}\,. \qquad (6)$$

Из последнего соотношения видно, что искомая связь нелинейна, следовательно, поперечные волны в мембране, лежащей на упругом основании, обладают дисперсией. При этом наличие упругого основания приводит к существованию критической частоты $\omega_{kp} = \sqrt{h/\rho}$ (частота отсечки), при превышении которой колебания мембраны носят волновой характер. Волны распространяются в двух направлениях (на что указывают знаки перед радикалом).

Соотношение (6) позволяет вычислить фазовую и групповую скорости поперечной волны.

Фазовая скорость гармонической волны – это скорость перемещения в пространстве точки, в которой фаза остается постоянной [6].

Компоненты вектора фазовой скорости задаются соотношениями:

$$v_{\text{ф}(x)}=\frac{\omega}{k_x}=\frac{\sqrt{c^2\left(k_x{}^2+k_y{}^2\right)+\omega_{kp}^2}}{k_x}\ ,\tag{7}$$

$$v_{\text{ф}(y)}=\frac{\omega}{k_y}=\frac{\sqrt{c^2\left(k_x{}^2+k_y{}^2\right)+\omega_{kp}^2}}{k_y}\ .\tag{8}$$

Групповая скорость – это скорость движения группы волн, которые образуют в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет [6].

Компоненты вектора групповой скорости задаются соотношениями:

$$v_{\text{гр}(x)}=\frac{d\omega}{dk_x}=\frac{c^2k_x}{\sqrt{c^2\left(k_x{}^2+k_y{}^2\right)+\omega_{kp}^2}}\ ,\tag{9}$$

$$v_{\text{гр}(y)}=\frac{d\omega}{dk_y}=\frac{c^2k_y}{\sqrt{c^2\left(k_x{}^2+k_y{}^2\right)+\omega_{kp}^2}}\ .\tag{10}$$

Из (7) – (10) можно определить: как для мембраны компоненты вектора групповой скорости связаны с компонентами вектора фазовой скорости. Эта связь выглядит следующим образом:

$$v_{\text{гр}(x)}=\frac{c^2k_x{}^2}{c^2\left(k_x{}^2+k_y{}^2\right)+\omega_{kp}^2}v_{\text{ф}(x)}\ ,\tag{11}$$

$$v_{\text{гр}(y)}=\frac{c^2k_y{}^2}{c^2\left(k_x{}^2+k_y{}^2\right)+\omega_{kp}^2}v_{\text{ф}(y)}\ .\tag{12}$$

Заметим, что групповая скорость меньше фазовой при любых значениях параметров, входящих в (11) и (12), а, это значит, что более длинные волны распространяются быстрее более коротких. Такой случай называют нормальной дисперсией.

Для систем, принадлежащих к классу $L=L\left(u,u_t,u_x,u_y\right)$, уравнение переноса энергии запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}u_t-L\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}u_t\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial u_y}u_t\right)=0,\tag{13}$$

которое удобно переписать в виде уравнения Умова – Пойнтинга [7]

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}=0,\tag{14}$$

где $\vec{S}=\left(S_x,S_y\right)$ – вектор плотности потока энергии, W – плотность энергии, связанные с лагранжианом формулами:

$$W=\frac{\partial L}{\partial u_t}u_t-L\ ,\tag{15}$$

$$S_x=\frac{\partial L}{\partial u_x}u_t,\tag{16}$$

$$S_y=\frac{\partial L}{\partial u_y}u_t\ .\tag{17}$$

Для изучаемой мембраны соотношения (15) – (17) перепишутся в виде:

$$W = \frac{1}{2}\left(\rho u_t^2 + N\left(u_x^2 + u_y^2\right) + hu^2\right), \qquad (18)$$

$$S_x = \frac{\partial L}{\partial u_x} u_t = -N u_x u_t \ , \qquad (19)$$

$$S_y = \frac{\partial L}{\partial u_y} u_t = -N u_y u_t \ . \qquad (20)$$

Для ответа на вопрос: с какой скоростью переносится энергия поперечных волн, распространяющихся в мембране, лежащей на упругом основании Винклера, кроме плотности энергии (18) и компонент плотности потока энергии (19), (20), нужно знать средние за период гармонической волны значения этих величин, поскольку скорость переноса энергии определятся как

$$\overrightarrow{v_{\text{эн}}} = \frac{\langle \vec{S} \rangle}{\langle W \rangle}, \qquad (21)$$

где $\langle S_x \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_x \, d(\theta)$, $\langle S_y \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_y \, d(\theta)$, $\langle W \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W \, d(\theta)$,

$\theta = \omega t - k_x x - k_y y$ – фаза бегущей гармонической волны.

Чтобы воспользоваться формулой (21), подставляем решение в виде (4), вычислив необходимые производные и произведя усреднение. Получим:

$$v_{\text{эн}(x)} = \frac{\langle S_x \rangle}{\langle W \rangle} = \frac{2Nk_x\omega}{\rho\omega^2 + Nk_x^2 + Nk_y^2 + h} = \frac{Nk_x}{\sqrt{\rho\left(N\left({k_x}^2 + {k_y}^2\right) + h\right)}} \ , \qquad (22)$$

$$v_{\text{эн}(y)} = \frac{\langle S_y \rangle}{\langle W \rangle} = \frac{2Nk_y\omega}{\rho\omega^2 + Nk_x^2 + Nk_y^2 + h} = \frac{Nk_y}{\sqrt{\rho\left(N\left({k_x}^2 + {k_y}^2\right) + h\right)}}. \qquad (23)$$

Здесь $\langle S_x \rangle = 2Nk_x\omega|A|^2$, $\langle S_y \rangle = 2Nk_y\omega|A|^2$, $\langle W \rangle = |A|^2\left(\rho\omega^2 + Nk_x^2 + \right.$ $\left. + Nk_y^2 + h\right)$, $|A|^2 = AA^*$.

Сравним (22), (23) с компонентами групповой скорости (9), (10), предварительно преобразовав последние

$$v_{\text{гр}(x)} = \frac{c^2 k_x}{\sqrt{c^2\left(\,{k_x}^2 + {k_y}^2\right) + \omega_{kp}^2}} = \frac{Nk_x}{\sqrt{\rho\left(N\left({k_x}^2 + {k_y}^2\right) + h\right)}} \ , \qquad (24)$$

$$v_{\text{гр}(y)} = \frac{c^2 k_y}{\sqrt{c^2\left(\,{k_x}^2 + {k_y}^2\right) + \omega_{kp}^2}} = \frac{Nk_y}{\sqrt{\rho\left(N\left({k_x}^2 + {k_y}^2\right) + h\right)}} \ , \qquad (25)$$

Из (22), (24) и (23), (25) легко заметить, что

$$v_{\text{гр}(x)} = v_{\text{эн}(x)} \,, \qquad v_{\text{гр}(y)} = v_{\text{эн}(y)} \,.$$

Итак, в линейном случае энергия переносится со скоростью движения волнового пакета – групповой скоростью волн. Скорость переноса энергии и групповая скорость волн зависят от компонент волнового вектора k_x , k_y и частоты колебаний ω и не зависят от амплитуды колебаний A.

Плоские сдвиговые волны в пластине, лежащей на нелинейно-упругом основании

С точки зрения аналитической механики исследуемый объект принадлежит к классу систем, имеющих лагранжиан вида: $L = L(u, u_t, u_x)$, описываемый уравнением динамики (1) при $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial u_y}\right) = 0$, поскольку в этом случае $u = u(x,t)$.

Подставляя лагранжиан

$$L=\frac{1}{2}(\rho u_t^2-Gu_x^2-h_1u^2-h_2u^4), \tag{26}$$

где G – модуль сдвига; h_1 и h_2 – коэффициенты, характеризующие жесткость нелинейно-упругого основания; u – поперечное перемещение (в направлении оси oy) срединной плоскости пластины, получим уравнение, описывающее плоскую сдвиговую волну

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-G\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+h_1u+2h_2u^3=0. \tag{27}$$

Задавая решение уравнения (27) в виде бегущей гармонической волны (3) при $k_x=k, k_y=0$, получим нелинейное дисперсионное уравнение:

$$-\rho\omega^2+Gk^2+h_1+4h_2|A|^2=0. \tag{28}$$

Выразим из уравнения (28) частоту:

$$\omega=\sqrt{\frac{Gk^2+h_1+4h_2|A|^2}{\rho}}. \tag{29}$$

Заметим, что в отличии от линейной задачи в нелинейной задаче частота ω зависит от амплитуды волны A.

Пользуясь формулой (29), найдем фазовую и групповую скорости:

$$v_{\text{ф}}=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{Gk^2+h_1+4h_2|A|^2}{\rho}}, \tag{30}$$

$$v_{\text{гр}}=\frac{Gk\sqrt{Gk^2+h_1+4h_2|A|^2}}{\sqrt{\rho}(Gk^2+h_1+4h_2|A|^2)}. \tag{31}$$

Для того чтобы определить вид дисперсии, необходимо найти отношение этих скоростей:

$$\frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{гр}}}=\frac{Gk^2+h_1+4h_2|A|^2}{Gk^2}, \tag{32}$$

то есть

$$v_{\text{ф}}=\frac{Gk^2+h_1+4h_2|A|^2}{Gk^2}v_{\text{гр}}. \tag{33}$$

Из формулы (33) следует, что фазовая скорость больше групповой скорости, а значит, дисперсия является нормальной.

Исходя из лагранжиана (26), определим среднюю плотность энергии и среднюю плотность потока энергии:

$$\langle W\rangle=|A|^2(\rho\omega^2+Gk^2+h_1+3h_2|A|^2), \tag{34}$$

$$\langle S\rangle=2G\omega k|A|^2. \tag{35}$$

Вычислим скорость переноса энергии

$$v_{\text{эн}}=\frac{\langle S\rangle}{\langle W\rangle}=\frac{2G\omega k}{\rho\omega^2+Gk^2+h_1+3h_2|A|^2}. \tag{36}$$

Учитывая формулу (29), запишем скорость энергии в виде:

$$v_{\text{эн}}=\frac{Gk}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{\sqrt{Gk^2+h_1+4h_2|A|^2}}{Gk^2+h_1+\frac{7}{2}h_2|A|^2}. \tag{37}$$

Из (37) очевидно, что скорость переноса энергии не равна групповой скорости.

Сравним групповую скорость и скорость переноса энергии волн. Найдем их отношение:

$$\frac{v_{\text{гр}}}{v_{\text{эн}}} = 1 - \frac{h_2|A|^2}{2\rho\omega^2}, \qquad (38)$$

показывающее, что скорость переноса энергии больше групповой скорости.

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие **выводы**: в нелинейной системе (27) присутствует нормальная дисперсия; скорость переноса энергии больше групповой скорости, при увеличении частоты отношение групповой скорости к скорости переноса энергии увеличивается, его предельное значение при частоте, стремящейся к бесконечности и фиксированной амплитуде, равно единице, то есть при большой частоте скорость переноса энергии и групповая скорость равны. При уменьшении частоты отношение групповой скорости к скорости переноса энергии уменьшается. При меньших частотах колебания не будут иметь волнового характера. При увеличении амплитуды колебаний значение отношения групповой скорости к скорости переноса энергии будет стремиться к 7/8, а при уменьшении амплитуды колебаний отношение этих скоростей будет стремиться к единице.

Работа выполнена в рамках государственного задания на фундаментальные научные исследования на 2021–2023 годы по теме № 0030-2021-0025.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вибрации в технике. Том 1. Колебания линейных систем / под редакцией В. В. Болотина. – Москва : Машиностроение, 1999. – 504 с. – Текст : непосредственный.
2. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – Москва : Стройиздат, 1984. – 679 с. – Текст : непосредственный.
3. Основы теории балок и плит на деформируемом основании / Н. Н. Леонтьев, А. Н. Леонтьев. Н. Н. Анохин, Д. Н. Соболев – Москва : МИСИ, 1982. – 120 с. – Текст : непосредственный.
4. Winkler E. Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit,. – Prague, 1867.
5. Большая российская энциклопедия. – Москва : Большая российская энциклопедия, 2012. – Том 19. – С. 704–705.
6. Физический энциклопедический словарь. – Москва : Советская энциклопедия, 1984. – 944 с. – Текст : непосредственный.
7. Задачи волновой динамики элементов конструкций : монография : в 2 частях. Часть 1 / С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев ; ФГУП "Российский федеральный ядерный центр - Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики". – Саров : Изд-во РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2015. – 254 с. – ISBN 978-5-9515-0278-0. – Текст : непосредственный.

EROFEEV Vladimir Ivanovich, doctor of physical and mathematical sciences, director[1], professor of the chair of theoretical, computer and applied mechanics[2], AVDEEVA Anastasiya Aleksandrovna, student[2], GROMOVA Kristina Aleksandrovna, student[2]

TRANSFER OF ENERGY BY LINEAR AND NONLINEAR SHEVER WAVES PROPAGATED IN PLATES LAYING ON ELASTIC FOUNDATIONS

[1]Mechanical Engineering Research Institute of the RAS – Branch of the “Federal Research Center A.V. Gaponov – Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences”
85, Belinsky St., Nizhny Novgorod, 603024, Russia. Tel.: +7 (831) 432-03-00;
e-mail: erof.vi@yandex.ru
[2]National Research Lobachevsky Nizhny Novgorod State University
23, Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603022, Russia. Tel.: +7 (952) 445-35-76; +7 (969) 606-12-34; e-mail: a.a.avdeeva2001@gmail.com ; KrGromova99@yandex.ru
Key words: energy transfer, wave, plate, membrane, elastic foundation.

The problems of propagation of a transverse wave in a membrane lying on an elastic foundation and on the propagation of a shear wave in a plate lying on a non-linear elastic foundation are considered. The main attention is paid to the analysis of peculiarities of energy transfer by waves in linear and nonlinear systems.

REFERENCES

1. Vibratsii v tekhnike. Tom 1. Kolebaniya lineynykh sistem [Vibrations in technology. Vol. 1. Oscillations of linear systems] / pod red. V.V. Bolotina. Moscow: Mashinostroenie. 1999. 504 p.
2. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. Raschyot konstruktsiy na uprugom osnovanii [Calculation of structures on an elastic foundation]. Moscow: Stroiyizdat. 1984. 679 p.
3. Leontev N. N., Leontev A. N., Anokhin N. N., Sobolev D. N. Osnovy teorii balok i plit na deformiruemom osnovanii [Fundamentals of the theory of beams and slabs on a deformable foundation]. Moscow: MISI. 1982. 120 p.
4. Winkler E. Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, Prague. 1867.
5. Bolshaya rossiyskaya entsiklopediya [Great Russian encyclopedia]. Moscow: Bolshaya Rossiyskaya Entsiklopediya, 2012. Vol. 19. P. 704–705.
6. Fizicheskiy entsiklopedicheskiy slovar [Physical Encyclopedic Dictionary]. Moscow: Sovetskaya entsiklopediya. 1984. 944 p.
7. Gerasimov S. I., Erofeev V. I. Zadachi volnovoy dinamiki konstruktsiy [Problems of wave dynamics of structural elements]. Ross. fed. yader. tsentr – Vseross. nauchno-issled. in-t eksperiment. Fiziki. – Sarov: Izd-vo RFYaTs – VNIIEF, 2015. 254 p. ISBN 978-5-9515-0278-0.

Получено: 05.04.2023 г.